

Aproximación a la distribución de Poisson incorporando el uso de tecnología desde el Enfoque Ontosemiótico

Resumen: En este artículo se presentan los resultados de la implementación de un diseño de enseñanza de la distribución de Poisson con apoyo del software Fathom. El experimento se desarrolló en tres etapas y consideró la participación de 20 estudiantes de Ingeniería que cursaban la asignatura de Métodos Estadísticos de una universidad chilena. Para analizar las producciones de los participantes se utilizó el análisis de contenido y algunos elementos teóricos del enfoque ontosemiótico. Los participantes se mostraron motivados al emplear la herramienta tecnológica, pues facilitó la comprensión de las principales características de la distribución de Poisson como sugieren los resultados obtenidos en el cuestionario final.

Palabras clave: Distribución de Poisson. Experiencia de Enseñanza. Uso de Software. Nivel Universitario.

Approximation to the Poisson distribution incorporating the use of technology from the Ontosemiotic

Abstract: This paper presents the results of the implementation of a Poisson distribution teaching design incorporating the use of Fathom software. The teaching experiment took place during three class sessions and 20 Engineering students from a Statistical Methods course at a Chilean university participated. To analyze the productions of the participants, content analysis and some theoretical elements of the ontosemiotic approach were used. The results indicate that it was motivating for the participants to use the technological tool, and it allowed them to understand and reason about the main characteristics of the Poisson distribution as the final results of the questionnaire suggested.

Keywords: Distribution of Poisson. Teaching Experiment. Software Use. University Level.

Aproximação à distribuição Poisson incorporando o uso de tecnologia na abordagem Ontosemiótica

Resumo: Este artigo apresenta os resultados da implementação de um projeto de ensino da distribuição de Poisson com o apoio do *software* Fathom. O experimento foi desenvolvido em três etapas e contou com a participação de 20 estudantes de Engenharia que cursavam a disciplina de Métodos Estatísticos em uma universidade chilena. Para analisar as produções dos participantes, utilizou-se a análise de conteúdo e alguns

Gabriela Cisternas

Magíster en Estadística y en Investigación en Educación. Profesor de la Universidad de la Serena. La Serena, Chile.

 orcid.org/0000-0002-8348-827X

 gcisternas18@gmail.com

Jocelyn Díaz-Pallauta

Doctorando en Ciencias de la Educación (Universidad de Granada). Profesor de Estado en Matemáticas y Computación y Licenciatura en Educación de la Universidad de La Serena. La Serena, Chile.

 orcid.org/0000-0001-5508-4924

 jocelyndiazpallauta16@gmail.com

Danilo Díaz-Levicoy

Doctor en Ciencias de la Educación. Profesor de la Facultad de Ciencias Básicas de la Universidad Católica del Maule. Talca, Chile.

 orcid.org/0000-0001-8371-7899

 dddiaz01@hotmail.com

Recibido el 29/01/2021

Aceptado el 29/04/2021

Publicado el 11/05/2021

elementos teóricos da abordagem ontosemiótica. Os participantes ficaram motivados com a utilização da ferramenta tecnológica, pois facilitou o entendimento das principais características da distribuição de Poisson sugeridas pelos resultados obtidos no questionário final.

Palavras-chave: Distribuição de Poisson. Experiência de Ensino. Utilização de Software. Ensino Superior.

1 Introducción

El estudio de la Estadística es parte importante de la formación en las carreras de Ingeniería, pues se considera que el conocimiento sobre diferentes temas de esta área es fundamental para su desarrollo personal y profesional. De allí la necesidad de que, a partir de los cursos introductorios, los estudiantes desarrollen habilidades en torno a la inferencia estadística, a través del trabajo de temas como el de distribución, el que se vincula con la variabilidad y que, junto con las relaciones entre las variables, proveerán al futuro ingeniero de mejores herramientas para tomar decisiones apropiadas en diferentes aspectos del quehacer profesional (ALVARADO, GALINDO y RETAMAL, 2013).

En el contexto universitario, se ha podido observar que cuando los estudiantes inician el estudio de la Estadística, muestran dificultades en la inferencia estadística, pues están habituados a solo realizar análisis descriptivos de los datos (BATANERO, TAUBER y SÁNCHEZ, 2004; ROLDÁN-LÓPEZ, BATANERO y ALVAREZ-ARROYO, 2020). La necesidad de disponer de conocimientos estadísticos y habilidades en torno a la proyección e inferencia (CANTORAL *et al.*, 2020) son fundamentales para la toma de decisiones, sobre todo en contextos complejos como la actual crisis sanitaria mundial, generada por la COVID-19, en que los datos en torno al número de contagios por regiones, su letalidad, tasas de incidencia acumulada, entre otros, han sido decisivos en las medidas que se han implementado en los diferentes países (MUÑIZ-RODRÍGUEZ, RODRÍGUEZ-MUÑIZ y ALSINA, 2020).

Los cursos de Estadística de las carreras de Ingeniería, usualmente, incorporan el estudio de la distribución de Poisson como una aproximación a la distribución binomial $B(n, p)$, o como un proceso de Poisson (CRUZ-RAMÍREZ, ÁLVAREZ-REYES y PÉREZ-SANTOS, 2014), pues se considera que el conocimiento sobre esta temática es importante en su desarrollo profesional, porque este tipo de distribución es empleada

como un modelo probabilístico para variados fenómenos aleatorios asociados a diferentes campos de las ciencias y la ingeniería (ZACKS, 2014).

Este tipo de distribución está definida para variables discretas y representa la cantidad de veces que ocurre un evento en un intervalo de tiempo dado. Se trata de una distribución de probabilidad, cuya definición matemática se define como: sea x una variable aleatoria que representa el número de sucesos aleatorios independientes que ocurren a una rapidez constante sobre un espacio o tiempo determinado (ARROYO *et al.*, 2014), y está dada por:

$$p(x; \lambda) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!}, & \text{si } x = 0, 1, 2, \dots; \lambda > 0; \\ 0, & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

En particular, λ es un parámetro positivo y corresponde a la media de ocurrencias del evento por unidad de tiempo, modelado por la situación.

Este tipo de distribución forma parte de los contenidos básicos del muestro, idea estadística fundamental de la inferencia (BATANERO *et al.*, 2019). Para su estudio se recomienda la incorporación de recursos tecnológicos, como los simuladores, que facilitan el análisis e interpretación de los datos (GARFIELD *et al.*, 2008), dado que, por ejemplo, es posible realizar un número elevado de experimentos y calcular de forma rápida variados estadísticos.

Diferentes organismos manifiestan la importancia de incorporar las tecnologías en el proceso de enseñanza, como es el caso de las *Pautas para la Evaluación e Instrucción en Educación Estadística* — GAISE (FRANKLIN *et al.*, 2005). Este documento destaca el uso de la tecnología en el aprendizaje de la Estadística, porque promueve la comprensión de distintos conceptos, pues facilita, de manera ágil, la visualización e interpretación de los datos analizados.

El presente trabajo aborda el estudio de la distribución de Poisson con estudiantes de Ingeniería por su utilidad en variados campos de la ciencia y la tecnología, además este estudio podría ser un aporte a la investigación en Didáctica de la Estadística por la escasa literatura sobre el tema en este nivel educacional (ALVARADO, GALINDO y RETAMAL, 2013; SALINAS, VALDEZ y SALINAS-HERNÁNDEZ, 2018). Además, también se aporta información que podría ser de interés para profesores universitarios en

relación con la enseñanza de este tipo de distribución. Por este motivo, se plantea el objetivo de valorar la implementación del uso de tecnología, en este caso el software Fathom, para la enseñanza de la distribución de Poisson con un grupo de futuros ingenieros.

En la siguiente sección se presentan los antecedentes, aunque son escasos, nos aportan información sobre experiencias de enseñanza del objeto matemático en que se enfoca el presente trabajo, así como la incorporación de uso de tecnología en el estudio de otro tipo de distribuciones. Posteriormente se expone el marco teórico y la metodología utilizada, para terminar con los resultados obtenidos junto a las conclusiones.

2 Antecedentes

En la literatura de didáctica no es usual encontrar investigaciones que aborden temas asociados a las distribuciones de probabilidad en niveles universitarios (SALINAS, VALDEZ y SALINAS-HERNÁNDEZ, 2018) y particularmente la de Poisson. En el trabajo de Cruz-Ramírez, Álvarez-Reyes y Pérez-Santos (2014) se compara la implementación de dos enfoques en la enseñanza de esta distribución en dos grupos experimentales — grupo 1 con 47 participantes y grupo 2 con 50 — de estudiantes de Ingeniería Industrial e Informática. Un enfoque se basaba en el tratamiento de la distribución de Poisson como una aproximación a la distribución binomial, mientras que, en el otro, como un proceso de Poisson. Se aplicó una prueba inicial y otra final, las que incorporan dos problemas que requerían la identificación de la distribución presentada junto con la selección del método que permitiera su solución. Los resultados evidencian mejoras en la prueba final respecto a la inicial, siendo algo mayor en el grupo 2 — segundo enfoque. Respecto a la comparación de ambos enfoques, no se apreció la predominancia de uno sobre el otro.

Por otra parte, los antecedentes informan de algunas experiencias dirigidas a la enseñanza de la Estadística, las cuales han incorporado simuladores computacionales, los que permiten repetir una experiencia un número elevado de veces y observar la convergencia. Este tipo de actividad podría resultar beneficiosa, pues promueve la comprensión de variados conceptos, por ejemplo, el de distribuciones de probabilidad, las que poseen una importante conexión con la noción de frecuencia relativa (GEA,

PARRAGUEZ y BATANERO, 2017).

Batanero, Tauber y Sánchez (2004) presentan una investigación con estudiantes universitarios pertenecientes a diferentes carreras, como Economía, Psicología y Educación, para conocer su razonamiento sobre la distribución normal, mediante un experimento de enseñanza que contempló el uso de ordenadores. Las autoras concluyen que la comprensión de la distribución normal es compleja para los estudiantes, porque requiere de una integración y relación de diferentes conceptos estadísticos, destacando como un aspecto positivo el uso de los ordenadores para la adquisición de dichos conceptos. En esta línea, Ramírez (2008) emplea el software Fathom para la enseñanza de la distribución normal y observa que contribuye a la rectificación de conceptualizaciones equivocadas acerca de este objeto estadístico. Asimismo, enfatiza la importancia de proponer datos reales en un contexto cercano a los estudiantes.

De manera similar, Salinas, Valdez y Salinas-Hernández (2018) desarrollan un estudio con profesores que impartían clases en Bachillerato (17 a 19 años). Los participantes diseñaron e implementaron una lección para la enseñanza de la distribución normal algunos de ellos incorporaron el uso del software Fathom, mientras que otros priorizaron el uso de papel y lápiz. Los profesores que utilizaron el software percibieron una mejora en sus prácticas de enseñanza, pues pudieron innovar, dado que en algunos casos era la primera vez que incorporaban estos recursos en sus clases. También con profesores, García-García, Fernández e Imilpán (2020) analizan el razonamiento estadístico de siete maestros mexicanos, a través de tareas de cálculo de probabilidad en problemas binomiales. En una primera etapa realizan un pretest, luego una experiencia con uso de software (Fathom) y a continuación un post test. Los autores, luego de comparar los resultados obtenidos en el pre y post test, concluyen que el uso de la herramienta tecnológica favoreció la comprensión de la distribución binomial, pues permitió visualizar la relación entre las frecuencias absolutas y relativas junto con su representación gráfica.

En resumen, las investigaciones realizadas en torno a las distribuciones muestrales dan cuenta que es un tema complejo para los estudiantes de variados niveles educativos. Esto radica en que su comprensión implica el conocimiento de diferentes conceptos estadísticos. En este sentido, el empleo de simuladores en la enseñanza de estos objetos matemáticos se conforma en una herramienta útil, ya que, a diferencia del uso de papel y

lápiz, es posible visualizar y analizar una gran cantidad de datos. Detectamos, también, una carencia de estudios que profundicen en la comprensión de la distribución de Poisson, por lo que el presente trabajo aporta información de interés para los profesores universitarios y nuevos antecedentes a la investigación en Didáctica de la Estadística.

3 Fundamentos

Los fundamentos de este trabajo se basan en algunos elementos teóricos del enfoque ontosemiótico, junto con el rol de la tecnología en la enseñanza de conceptos estadísticos, los que se detallan a continuación.

3.1 Marco teórico

El presente trabajo se sustenta en elementos del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos — EOS (GODINO, BATANERO y FONT, 2007, 2019). Los autores conciben el significado de un objeto matemático como el sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal) o una institución (significado institucional) para resolver las situaciones-problema de las que emerge el objeto (en nuestro caso la distribución de Poisson).

En las prácticas matemáticas intervienen diferentes objetos primarios: situaciones problemas; lenguaje (términos, expresiones, notaciones, gráficos etc.); conceptos (dados por su definición o descripción); proposiciones o propiedades (enunciados sobre conceptos); procedimientos (operaciones, algoritmos, técnicas); y argumentos o razonamientos empleados en la justificación de las proposiciones y procedimientos (deductivos, inductivos etc.). Las relaciones entre dichos objetos forman configuraciones, las que pueden ser epistémicas, cuando se refieren al significado institucional, o cognitivas, si se trata del significado personal (FONT, GODINO y GALLARDO, 2013).

Específicamente, utilizaremos algunas componentes de la idoneidad didáctica, la que se concibe como una herramienta que permite valorar los procesos de enseñanza y de aprendizaje, en la medida en que se acoplen los significados personales mostrados por los estudiantes y el significado institucional pretendido o implementado incorporando el contexto y los recursos (entorno).

La idoneidad didáctica (GODINO, 2013; GODINO, CONTRERAS y FONT, 2006) considera las siguientes componentes: 1) *Idoneidad epistémica* — se relaciona con los significados implementados o pretendidos en el proceso de enseñanza, respecto a un objeto matemático que se está estudiando; 2) *Idoneidad cognitiva* — es el grado en que son adheridos los significados personales logrados por los estudiantes con los significados pretendidos y/o implementados por los docentes; 3) *Idoneidad interaccional* — identifica el grado en que el diseño de enseñanza permite advertir conflictos semióticos potenciales junto con sus posibles remediales; 4) *Idoneidad mediacional* — corresponde al empleo de recursos tecnológicos o manipulativos necesarios para la enseñanza y el aprendizaje, atendiendo a diferentes aspectos; 5) *Idoneidad afectiva* — grado de implicancia de los estudiantes en el proceso de enseñanza; 6) *Idoneidad ecológica* — correspondiente al grado en que los procesos de enseñanza y de aprendizaje se adhiere a un marco local y general.

3.2 Rol de la tecnología

La incorporación de la tecnología en la enseñanza de temáticas de la Estadística y la Probabilidad se ha incrementado en el último tiempo, generando cambios en la manera en que se concibe su enseñanza (PRATT, DAVIES y CONNOR, 2011), por medio del uso de programas dirigidos especialmente a esta área como Fathom (FINZER, 2007) y Tinkerplots. Estos recursos facilitan los cálculos, la construcción de diferentes tipos de representaciones, junto con establecer modelos de ajustes en una gran cantidad de datos.

Otras oportunidades que entrega el software, como señalan Batanero y Borovcnick (2016), es la posibilidad de simular en una plataforma, donde haciendo variar la cantidad de datos representados, o alterando los parámetros, es posible interactuar de manera dinámica con gráficos u otras representaciones. A partir de dichas observaciones, se pueden realizar conjeturas, y posteriormente formalizar diversos conceptos. También, a través del software se facilita la comprensión de propiedades como, por ejemplo, el concepto de la probabilidad desde un enfoque frecuencial.

Dada la importancia de incorporar la tecnología en la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad, se utiliza el software Fathom en la enseñanza de la distribución de Poisson en estudiantes universitarios.

3.3 Método

La investigación es de tipo cualitativo (SAMPIERI, 2018), pues se busca un conocimiento profundo tanto de las diversas etapas que componen el proceso de instrucción de la distribución de Poisson como de su conjunto, en el que se utilizó el software Fathom.

Puntualmente el estudio se compone de tres etapas. La primera consistió en la aplicación de una prueba diagnóstica para detectar los conocimientos previos de los estudiantes con relación a los conceptos estadísticos de población, muestra, esperanza, media poblacional, función probabilidad y función de distribución de una variable. La segunda parte correspondió a una intervención docente que involucra el uso de tecnología (Fathom) para la enseñanza de la distribución de Poisson. Y la tercera etapa conllevó la aplicación de un cuestionario final, con el objeto de evaluar los conceptos tratados en el proceso de instrucción realizado.

Las producciones de los participantes, tanto de la prueba de diagnóstico como del cuestionario final, fueron estudiadas por medio de un análisis de contenido (IZCARA, 2016), para lo cual fue necesario establecer categorías que permitieran su evaluación.

3.4 Muestra

La muestra se compone de 20 estudiantes de primer año de la carrera de Ingeniería en Estadística de una universidad de la región de Valparaíso (Chile), con edades que fluctúan entre los 18 y los 20 años.

En la institución donde se realizó la investigación, la asignatura métodos estadísticos parte con el estudio de la variable aleatoria, para luego revisar los conceptos de función de probabilidad, función de distribución y posteriormente se aborda las distribuciones para variables discretas. La distribución de Poisson es un tema habitual que se trata como un procedimiento por sí mismo.

El desarrollo de la investigación contó con la autorización de la dirección de la carrera, los profesores de la asignatura y los propios estudiantes quienes dieron su consentimiento escrito para participar en el estudio.

3.5 Recogida de datos

Los instrumentos utilizados para la recolección de los datos fueron dos cuestionarios, notas de campo y grabaciones de sesiones.

La investigación se desarrolló en tres sesiones de 90 minutos cada una, dispuestas de la siguiente manera:

- Aplicación de cuestionario diagnóstico
- Implementación del diseño didáctico
- Aplicación de cuestionario final

Los cuestionarios diagnóstico y final fueron respondidos de forma presencial e individual, mientras que la intervención en el aula se desarrolló en un ambiente de discusión colectiva de las actividades propuestas. El rol de la investigadora principal fue mediador, pues aclaraba dudas cuando era necesario y realizaba preguntas clave para resaltar aspectos importantes de los contenidos trabajados durante la sesión.

i) Cuestionario diagnóstico

Este cuestionario fue aplicado previo a realizar la actividad de simulación con uso de software y su objetivo consistió en explorar los conocimientos previos de los estudiantes, pues la comprensión de las distribuciones muestrales requiere el dominio de conceptos estadísticos básicos (BEN-ZVI, BAKKER y MAKAR, 2015).

Las preguntas fueron seleccionadas por un equipo compuesto de tres doctores en Estadística, con vasta expertiz en docencia universitaria. Se consideró su experiencia en cursos anteriores y el programa de la asignatura. El cuestionario se compuso de cuatro ítems, que se presentan en el Anexo, y abordan diversos conceptos como se puede observar en la Tabla 1, entre ellos el de media muestral y poblacional, función probabilidad, junto con el de esperanza. Estas nociones son fundamentales para la comprensión de la distribución de Poisson (ARROYO *et al.*, 2014).

Tabla 1: Contenidos evaluados en cada ítem del cuestionario diagnóstico

Contenido	I1	I2	I3	I4
Media Muestral	X			
Media poblacional	X			

Contenido	I1	I2	I3	I4
Función de probabilidad		X		
Función distribución de variable aleatoria			X	
Esperanza de una variable aleatoria				X

Fuente: Elaboración Propia

ii) Diseño didáctico

Para el diseño de la lección fueron recogidas las recomendaciones de GAISE (FRANKLIN *et al.*, 2005), en cuanto a que se parte de una exploración de los datos, los que surgen de un contexto cercano para el estudiante. Para ello se plantearon preguntas como:

- (a) ¿Cuántas fallas crees que tiene un computador personal antes de llegar a las 1.000 horas de funcionamiento?
- (b) ¿Cuántos defectos crees que encontraremos en un centímetro cuadrado de tela y en un metro cuadrado?
- (c) ¿Cuántas estrellas hay en un determinado espacio de cielo?
- (d) ¿Cuántos siniestros, por póliza de seguro, sufre un asegurado de cierta aseguradora de automóviles?

Una vez que los estudiantes realizaron sus estimaciones, se solicitó que compararan sus respuestas con el resto de sus compañeros para abrir un debate en relación con sus predicciones junto con fundamentaciones que pudieran sostener sus argumentos.

Posteriormente, se invitó a abordar, nuevamente, algunas de las preguntas a través del software Fathom. Cabe señalar que este recurso fue diseñado para la enseñanza de la probabilidad y la estadística. Entre sus fortalezas se destaca que permite realizar un gran volumen de simulaciones de un experimento aleatorio, además de representar dichos datos junto con el cálculo de variados estadísticos. Incorporar este tipo de recursos favorece la experimentación (BIEHLER *et al.*, 2013), además, agiliza procedimientos de cálculo, que de otra manera tomarían mayor cantidad de tiempo.

iii) Cuestionario Final

El cuestionario final se compone de dos ítems que abordan diferentes temas en

torno a la distribución de Poisson. El ítem 1 fue recogido de la base de datos personal del profesor que dictaba la asignatura, por lo que no forma parte intencionada del presente trabajo y fue utilizado en evaluaciones de cursos anteriores. El objetivo de dicho ítem era evaluar si el estudiante podía identificar y calcular el promedio de la muestra, y posterior a ello determinar la probabilidad utilizando la representación algebraica de la distribución de Poisson.

El ítem 2 se presenta en la Figura 1 y se seleccionó para indagar si el estudiante reconoce la representación gráfica de la distribución trabajada en la sesión con uso de software y si, además, es capaz de aplicar la fórmula de la distribución para calcular las probabilidades de manera teórica. Específicamente plantea una situación que se aborda desde un enfoque teórico y frecuencial de la Probabilidad. Se decidió incorporar ambos aspectos porque se considera que pueden favorecer una mejor comprensión de este tipo de distribución de probabilidad (EICHLER y VOGEL, 2014).

En una determinada ciudad del país están interesados en conocer la cantidad de incendios ocurridos por mes. La tabla expone los datos recopilados. A partir de ella calcula las probabilidades experimentales y teóricas. Realiza una gráfica de la información y verifica si puedes concluir que los datos entregados se distribuyen Poisson.

Número de incendios por mes	Número de veces observados	Frecuencia relativa	Probabilidad teórica
0	15		
1	32		
2	35		
3	21		
4	10		
5	4		
6	1		

Figura 1: Ítem 2 de cuestionario final (Elaboración Propia)

4 Procedimiento de Análisis

Para analizar la implementación de la experiencia de aula con uso de tecnología y las respuestas de los estudiantes del cuestionario final, se sientan las bases en elementos del EOS, específicamente en la configuración ontosemiótica, pues permite analizar de manera descriptiva la práctica matemática realizada por los estudiantes en las diferentes etapas propuestas en el trabajo, así como identificar el significado personal atribuido, mediante el análisis de la diversidad de objetos y procesos que se relacionan al resolver una situación problema (GODINO, BURGOS y GEA, 2021).

La relación de la variedad de objetos que intervienen en la resolución de un tipo de situación problema genera una configuración (FONT, GODINO y GALLARDO, 2013). En este trabajo, al igual que Alvarado, Galindo y Retamal (2013) quienes abordan la distribución binomial, se han identificado dos configuraciones presentadas en el Cuadro 1. Una configuración computacional, ligada a los objetos matemáticos que se presentan en la resolución de la situación-problema en que se hace uso del simulador, y una configuración numérico-algebraica, asociada a la práctica en torno a la resolución de las situaciones presentadas en el cuestionario final.

En el Cuadro 1 se observan los diferentes objetos que participan en cada configuración, dependiendo si se trata de la computacional o la numérico-algebraica. Por ejemplo, en la configuración numérico-algebraica la *situación-problema* consiste en reconocer la distribución de Poisson en una situación presentada, mientras que en la computacional requiere aproximarse a este tipo de distribución a partir del estudio de su gráfica. El *lenguaje* utilizado puede ser gráfico estático o dinámico dependiendo de la configuración. Los *conceptos* son dados por su definición o descripción como la distribución de Poisson, la probabilidad, o los parámetros. Las *proposiciones o propiedades* se corresponden a los valores que pueden tomar las probabilidades, o los intervalos de valores para el parámetro. Los *procedimientos* variarán dependiendo de la configuración, por ejemplo, construir un gráfico será diferente si se realiza con papel y lápiz que con uso de tecnología. Finalmente, los *argumentos* que permiten asegurar la veracidad de las proposiciones y procedimientos utilizados — deductivos, inductivos, algebraicos etc. — y que también dependerán del tipo de configuración que se trate.

Cuadro 1: Configuraciones ontosemióticas

Elemento de significado	Configuración computacional	Configuración numérico-algebraica
Problemas	Aproximación a la distribución de Poisson, por medio del análisis del comportamiento de su gráfica.	Identificación de la distribución de Poisson en situaciones diversas.
Lenguaje	Representaciones gráficas dinámicas realizadas con el software. Representaciones verbales y algebraicas de la distribución de	Expresión algebraica de la distribución. Gráficos estáticos hechos con papel y lápiz.

	Poisson.	
Procedimientos	Manipulación del software. Simulación, variación del parámetro. Incorporación de datos a la situación. Cálculo de la probabilidad.	Presentación de la distribución con la media y la variable independiente. Cálculo de la probabilidad. Identificación del parámetro. Relación de la distribución de Poisson con su gráfica.
Conceptos	Distribución muestral de Poisson. Probabilidades. Parámetro λ . Intervalo.	Probabilidad frecuencial. Probabilidad teórica. Promedio y esperanza. Parámetro. Intervalo.
Propiedades	Efecto del parámetro sobre la gráfica. Significado del parámetro. Conjunto al cual pertenece el parámetro.	Forma de la gráfica. Ocurrencia de sucesos en un tiempo constante. Características del parámetro.
Argumentos	Argumentos informales realizados a partir de la representación gráfica, simulaciones, generalización y análisis.	Relación de la probabilidad teórica con la experimental. Argumentos verbales y algebraicos deductivos.

Fuente: Elaboración Propia

5 Resultados

A continuación, se presentan los resultados obtenidos en las diferentes etapas del estudio. En primer lugar, se describen los del cuestionario diagnóstico, seguido de la experiencia en aula con uso del software Fathom y, finalmente, del cuestionario final.

i) Resultados del cuestionario diagnóstico

Las respuestas de los estudiantes fueron analizadas por medio de un análisis de contenido (IZCARA, 2016) y se establecieron tres categorías de respuesta para cada ítem: correcta, parcialmente correcta e incorrecta. En la Tabla 2 se presenta un resumen de los resultados.

Tabla 2: Resultados de evaluación, según ítem del cuestionario diagnóstico

Ítems	Correcto		Parcialmente correcto		Incorrecto	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Ítem 1	5	25	12	60	3	15
Ítem 2	9	45	7	35	4	20
Ítem 3	3	15	13	65	4	20
Ítem 4	12	60	5	25	3	15

Fuente: Elaboración Propia

Observamos que el ítem 1, en que se solicitaba determinar la edad esperada de un integrante de un grupo de personas, la mayoría de los participantes lo resuelve de manera parcialmente correcta (60%), seguido de correcto (25%). Las dificultades radicaron en confundir la media muestral con la esperanza de la población, situación advertida en la literatura (BATANERO, 2001), pues la mayoría respondía que la edad de la quinta persona es 24, porque este valor corresponde a la edad para que la media muestral fuera de 20 años.

Cabe señalar que los ítems 2, 3 y 4 comparten el mismo encabezado de la pregunta y forman parte de los temas tratados con anterioridad en clases, por lo que se esperaba que fueran sencillos para los estudiantes. En este sentido, se aprecia que la mayor parte de los participantes respondió el ítem 2 de manera correcta (45%) o parcialmente correcta (35%). El error que apareció con mayor frecuencia es la repetición de los valores de la variable aleatoria, como indicar que la variable aleatoria puede tomar los valores: 0, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 5, lo que no es correcto, porque en esta situación la variable aleatoria toma los valores 0, 1, 2, 3, 4 y 5.

El ítem 3 sobre función de distribución, fue resuelto de manera correcta por un bajo porcentaje de estudiantes (15%), la mayoría lo hizo de manera parcialmente correcta (65%). Los errores consistieron en el cálculo de la probabilidad para cada valor de la variable aleatoria, y se deben porque no consideran todos los valores que puede tomar la variable aleatoria del ítem anterior (ítem 2).

Por último, el ítem 4 es el que presenta un mayor porcentaje de respuestas correctas del cuestionario — 60% totalmente y 25% parcialmente. Las dificultades

detectadas muestran que los estudiantes identifican los valores de la variable aleatoria junto a la probabilidad asociada, sin embargo, en algunos casos solo escriben el signo de sumatoria, y no señalan qué es lo que se debe sumar, dejando el cálculo inconcluso.

ii) Resultados de la implementación de la clase

En la experiencia de aula desarrollada, los estudiantes pudieron formalizar las características de la distribución de Poisson modelando la situación: ¿Cuántas fallas crees que tiene un computador personal antes de llegar a las 1.000 horas de funcionamiento?

La Figura 2 es un ejemplo de la primera gráfica obtenida con ayuda del software computacional Fathom. En ella se muestra cómo se distribuyen 1.100 valores aleatorios de acuerdo con Poisson con una media de 3,05 (lambda), donde la simulación permite detectar el efecto del parámetro lambda en la gráfica.

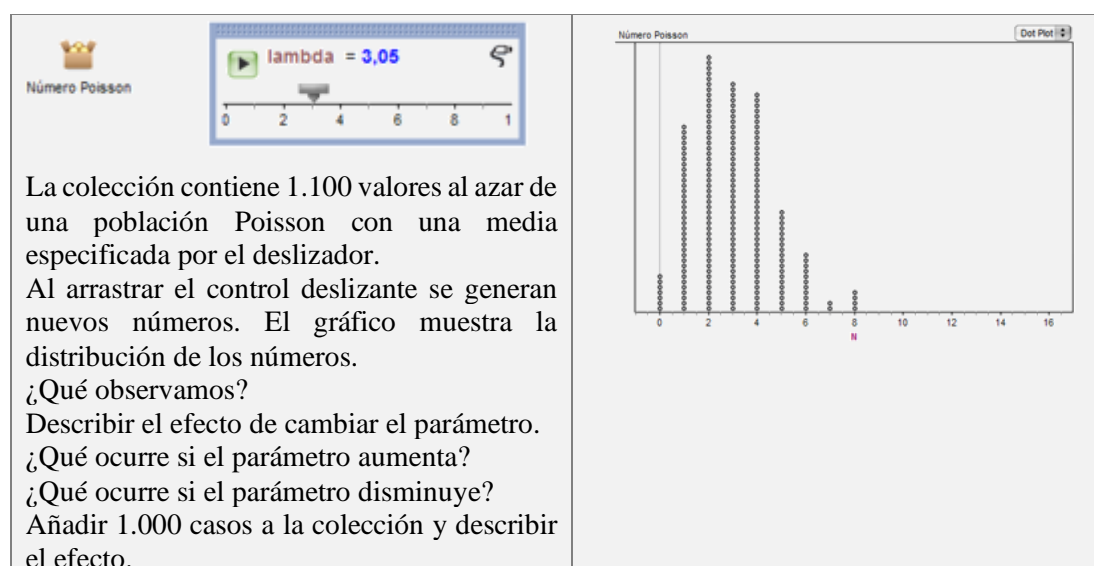


Figura 2: Gráfica software Fathom simulación 1 (Elaboración Propia)

En este momento, la investigadora principal, para guiar las ideas de los estudiantes, propuso preguntas como: ¿Qué observas en la gráfica?; ¿Podrías describir cómo cambia el parámetro lambda (media de la distribución)?; ¿Qué ocurre cuando el parámetro aumenta?; ¿Qué ocurre cuando el parámetro disminuye? Algunos estudiantes compartieron con el resto de la clase sus observaciones y conjeturas.

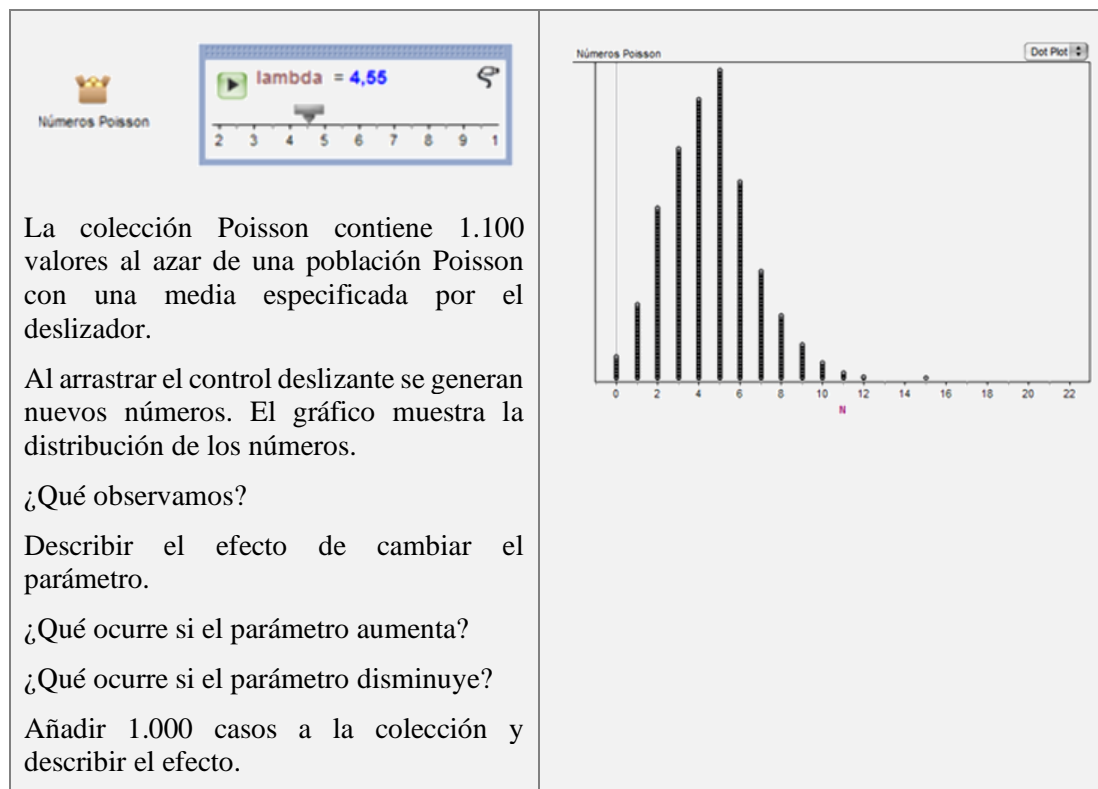


Figura 3: Gráfica software Fathom simulación 2 (Elaboración Propia)

Posteriormente, para profundizar en la etapa descrita anteriormente, se pide a los participantes añadir 1.000 casos más a la muestra y describir lo que ocurre, con el objeto de generalizar sus conjeturas iniciales, obteniendo gráficas como la expuesta en la Figura 3 en que la media cambia a 4,55 (λ) y también el aspecto del gráfico toma mayor nitidez respecto al anterior (Figura 2).

Luego, se pide a los estudiantes responder las preguntas propuestas en la aplicación. A continuación, se presenta un diálogo entre la investigadora (P) y un estudiante (A) de la clase:

P: ¿Qué está ocurriendo con la gráfica?

A: Los datos se cargan a la izquierda cuando el parámetro es pequeño.

P: ¿Qué tan pequeño?

A: Cero.

P: ¿Puede ser menor que cero?

A: No sé, pero creo que no. En todos los ejemplos que tenemos un número negativo no sirve.

P: ¿A qué te refieres con que no sirve?

A: Que es imposible que un computador falle en promedio -3,4 horas.

El episodio de la clase fue analizado a través de diferentes facetas de la idoneidad

didáctica (GODINO, 2013) que nos permiten valorar el grado de efectividad del proceso de instrucción. El diálogo, anteriormente expuesto, junto con la configuración computacional (Cuadro 1), muestra que, desde la faceta de la idoneidad cognitiva, el estudiante utiliza un lenguaje verbal para describir el comportamiento de la gráfica construida de manera dinámica a través del software. El procedimiento corresponde a una simulación en la que se varía el parámetro λ , junto con un aumento de datos. Las propiedades verbalizadas por el estudiante se refieren al intervalo de valores que puede tomar el parámetro λ , y cómo este altera la gráfica de la situación representada. Los argumentos son verbales y se basan en el comportamiento de los datos presentados en el gráfico.

La idoneidad interaccional se valora a través de las interacciones entre la investigadora y los estudiantes. La docente en todo momento promovió el diálogo entre los integrantes de la clase y planteó preguntas que guiaran el razonamiento de los estudiantes para lograr una comprensión de conceptos teóricos. Un ejemplo de ello es cuando le pregunta al estudiante ¿A qué te refieres con que los valores negativos del parámetro λ no sirven? Esta pregunta permite que el estudiante conjeture que un número negativo no forma parte de esta distribución.

El uso de un simulador computacional sugiere valorar de manera positiva la idoneidad mediacional, pues el recurso seleccionado para implementar el proceso de instrucción, como lo fue el software Fathom, permitió una optimización del tiempo en la realización de un número elevado de simulaciones, junto con facilitar la visualización de las características y parámetros de la distribución.

La valoración de la idoneidad emocional se considera óptima, pues los participantes se involucraron de manera positiva en la experiencia, dado que compartían reflexiones con sus compañeros, comentaban sus avances y verificaban si coincidían en las respuestas. Los comentarios de los propios participantes indicaron que el uso de la tecnología fue motivador, pues les permitió un acercamiento a este tipo de distribución de probabilidad de manera más empírica.

Para cerrar el episodio de la clase, algunos estudiantes solicitaron realizar más simulaciones, en las que ampliaban los casos o los valores del rango del parámetro. La investigadora accedió a esta solicitud y los estudiantes pudieron generar y visualizar

diferentes gráficos como los presentados en la Figura 4, y a partir de ellos establecer algunas conjeturas.

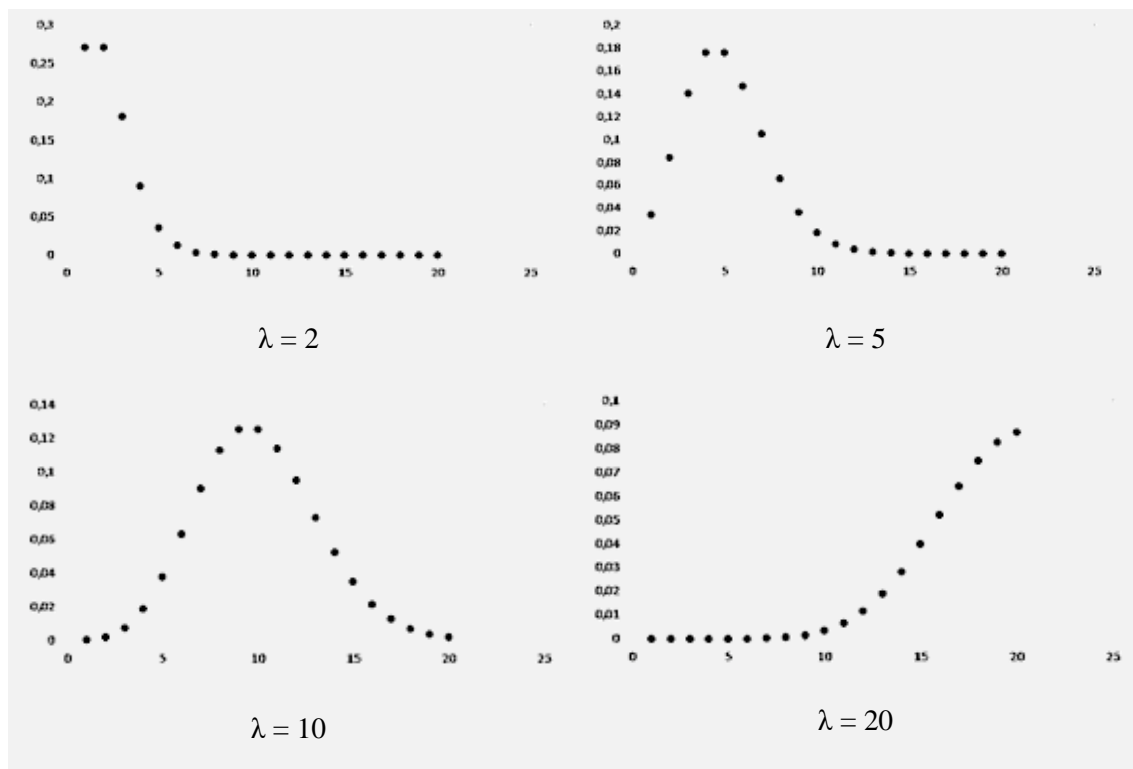


Figura 4: Distribución de Poisson con diferentes valores de lambda — λ (Elaboración Propia)

Por ejemplo, los participantes señalaron que cuando el parámetro está entre 8 y 12 la gráfica se asemeja a la gráfica de la distribución normal, o que cambia su forma siendo similar a una campana, mientras que cuando el parámetro toma valores mayores a 20 la gráfica es creciente.

Para finalizar, se pide a los estudiantes que analicen un conjunto de datos y que determinen si la situación analizada corresponde o no a una distribución de Poisson. La clase se cierra definiendo formalmente el concepto de distribución de Poisson, que se corresponde a una distribución de probabilidad de variable discreta, cuyo parámetro λ siempre es positivo.

iii) Resultados cuestionario final

Respecto a los resultados obtenidos en el cuestionario final, en la Tabla 3 se presenta lo relativo a los diferentes procedimientos implicados en la resolución de los dos ítems que lo conforman. Apreciamos que la mayor parte de los estudiantes determina de manera correcta la media de la muestra tanto en el ítem 1 (85%) como en el 2 (70%), lo

que se conforma en el primer paso para calcular las probabilidades usando la distribución de Poisson, procedimiento que también fue realizado por la mayor parte de los estudiantes (ítem 1, 80%; ítem 2, 60%). En ambos ítems un alto porcentaje resuelve satisfactoriamente siendo más elevado en el ítem 2 (85%) que en el 1 (60%). Respecto a presentar la distribución de Poisson, señalando de manera correcta tanto la media como la variable independiente, gran parte de los estudiantes lo desarrolla correctamente en el ítem 1 (80%) y en menor medida en el 2 (60%). El ítem 2 consideró otros procedimientos que no fueron contemplados en el ítem 1, y que también fueron desarrollados por la mayoría de los participantes, como calcular la probabilidad desde un enfoque frecuencial (90%) o la construcción de un gráfico (90%).

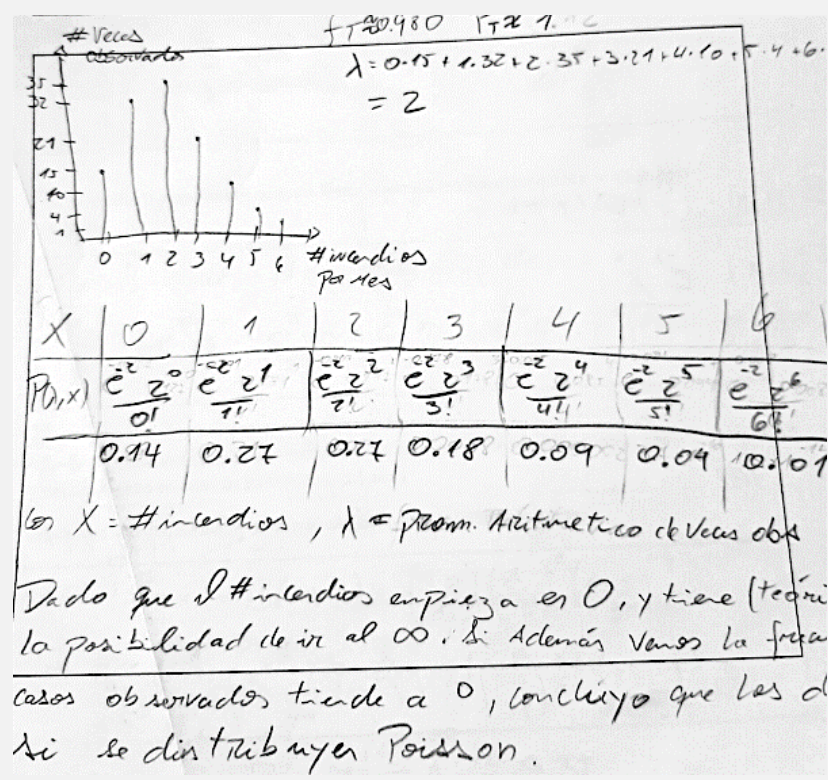
Tabla 3: Resultados de procedimientos observados en el cuestionario final

Pasos correctos ítem cuestionario final	Ítem 1		Ítem 2	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Identificar la variable independiente.	17	85	16	80
Calcular la media de la muestra.	17	85	14	70
Presentar la distribución con la media y la variable independiente	16	80	12	60
Calcular aritméticamente la probabilidad con calculadora y/o manual.	16	80	17	85
Calcular la probabilidad frecuencial.			18	90
Presentar el resultado de manera correcta.	12	60	17	85
Utilizar notaciones y símbolos.	17	85	11	55
Construir el gráfico.			18	90
Argumentar su respuesta con lenguaje verbal.	7	35	4	20

Fuente: Elaboración Propia

Como señala la literatura, este tipo de distribución de probabilidad tiene una importante conexión con la noción de frecuencia relativa (GEA, PARRAGUEZ y BATANERO, 2017), de allí la importancia de plantear preguntas al estudiante que permitan valorar este aspecto. Por este motivo, el ítem 2 del cuestionario incorporó el enfoque frecuencial y teórico de la Probabilidad (Figura 1).

En la Figura 4 se presenta una respuesta del ítem 2 y su análisis se sustenta en la configuración numérica-algebraica (Cuadro 1), la que considera los diferentes objetos matemáticos que intervienen en la resolución de dicha situación-problema. En la producción se observa que se calcula el parámetro (media muestral) para luego reemplazarlo en la Probabilidad teórica. Uno de los argumentos verbales importantes que presenta el estudiante es la característica del parámetro, que comienza en cero, es decir, pueden ocurrir cero incendios, y teóricamente podrían ocurrir infinitos incendios también. La información la relaciona para inferir que la muestra corresponde a una distribución de Poisson. Se aprecian algunas debilidades en la construcción de la representación gráfica, como la falta de proporción en los valores de los ejes, lo que podría deberse a un desconocimiento, o la falta de espacio suficiente para realizar una mejor construcción.



Veces observados

$\lambda = 0.15 + 1.32 + 2.35 + 3.21 + 4.10 + 5.4 + 6. = 2$

X	0	1	2	3	4	5	6
$P(x)$	$\frac{e^{-2} 2^0}{0!}$	$\frac{e^{-2} 2^1}{1!}$	$\frac{e^{-2} 2^2}{2!}$	$\frac{e^{-2} 2^3}{3!}$	$\frac{e^{-2} 2^4}{4!}$	$\frac{e^{-2} 2^5}{5!}$	$\frac{e^{-2} 2^6}{6!}$
	0.14	0.27	0.27	0.18	0.09	0.04	0.01

Donde X = # incendios, λ = prom. Aritmética de Veces obs

Dado que el # incendios empieza en 0, y tiene (teoría) la posibilidad de ir al ∞ . Si Además vemos la frecuencia observada tiende a 0, concluimos que los datos se distribuyen Poisson.

Propiedades:

- Forma de la gráfica.
- Rango de valores que puede tomar del parámetro.

Argumentos:

- Argumentación verbal formal basado en los datos.

Lenguaje:

- Gráficos estadísticos hechos con papel y lápiz.
- Numérico.
- Verbal.

Procedimientos:

- Construcción del gráfico.
- Cálculo de la probabilidad frecuencial y teórica.
- Identificación del parámetro.

Conceptos:

- Probabilidad teórica, parámetro.

Figura 4: Respuesta estudiante ítem 2 cuestionario final (Elaboración Propia)

6 Conclusiones

El presente trabajo se centra en la distribución de Poisson, la que en general es escasamente abordada pese a su gran utilidad en contextos particulares. Se aborda su enseñanza desde un enfoque de proceso de Poisson que incorpora el uso de tecnología, entendiendo al simulador computacional como un mediador semiótico que permite acercar al estudiante a la distribución de Poisson y promover una comprensión de las principales características de esta distribución — discreta, parámetro mayor o igual a cero — de manera dinámica. En este punto, esta experiencia complementa la de Cruz-Ramírez, Álvarez-Reyes y Pérez-Santos. (2014), quienes contemplaron el enfoque de proceso de Poisson, también como una aproximación a la distribución binomial, pero sin considerar el uso de algún software en el proceso de instrucción.

En el estudio fue posible observar que el apoyo del software favoreció que los estudiantes se focalizaran en prestar mayor atención a las características de la distribución, en lugar del cálculo algorítmico de probabilidades. El uso del simulador, como ya ha sido advertido en la literatura (BATANERO y BOROVCNICK, 2016; GEA, PARRAGUEZ y BATANERO, 2017), permitió a los participantes realizar diversas acciones como agregar o quitar datos, cambiar rangos del parámetro, sin la necesidad de estar calculando aritméticamente los resultados, optimizando los tiempos de forma significativa.

Se pudo apreciar una mejora de los resultados obtenidos en el cuestionario final en comparación al diagnóstico. En el caso de la distribución de Poisson, la mejora podría deberse a que el uso de Fhatom contribuyó a revertir algunos conceptos errados, a través de la visualización y análisis de los datos, conforme se altera el parámetro. Este tipo de mejora ya ha sido advertido en investigaciones previas, especialmente en el estudio de la distribución binomial (RAMÍREZ, 2008; GARCÍA-GARCÍA, FERNÁNDEZ y IMILPÁN, 2020).

De la valoración de las diferentes facetas que componen la idoneidad didáctica, se destaca en la faceta mediacional que el contexto de las actividades propuestas involucraba el uso de un software computacional, lo que al parecer no había sido considerado en otras asignaturas de la carrera de ingeniería hasta ese momento. Desde la faceta emocional se ofreció un ambiente motivador, a partir del hecho de que los estudiantes pudieran

experimentar con el software en su computador, junto con compartir con sus compañeros de clase sus conjeturas y observaciones. En este sentido, se destaca que los estudiantes estaban habituados a la enseñanza tradicional de diferentes temas, de modo que de acuerdo con sus comentarios consideraron positivo dejar de lado los cálculos algorítmicos y desarrollar otras habilidades, como las ligadas al razonamiento de las características de la distribución de Poisson.

Los participantes mostraron una buena disposición a participar en las actividades propuestas, lo que fue posible observar en su solicitud de seguir experimentando con el software acabado el tiempo, y en los comentarios realizados por ellos mismos, pues al parecer era la primera vez que trabajan con software en el contexto universitario. Los estudiantes sobre todo valoraron de manera positiva el uso del software, pues habían podido optimizar los tiempos en la obtención de gráficos que representaban una gran cantidad de datos, que de otra manera habrían requerido más tiempo y en los que el foco se habría centrado en la construcción de dicha representación, en lugar de su comprensión.

En el cuestionario final se obtuvieron buenos resultados, debido a que se consideraron los diferentes aspectos que caracterizan a la distribución de Poisson. A pesar de ello, las producciones mostraron que los argumentos verbales utilizados se limitan a indicar si sigue o no este tipo de distribución, pero no se profundiza en argumentos más elaborados que permitan validar la veracidad de sus aseveraciones. Este aspecto podría deberse a que la situación planteada no promovía la evaluación de esta habilidad, de igual manera se podría reforzar este punto a través de situaciones que profundicen en este aspecto, sobre todo en estudiantes de nivel universitario que en su vida profesional tendrán que tomar de manera argumentada diferentes decisiones.

Referências

ALVARADO, Hugo; GALINDO, Maritza; RETAMAL, Lidia. [Comprensión de la distribución muestral mediante configuraciones didácticas y su implicación en la inferencia estadística](#). *Enseñanza de las Ciencias*, v. 31, n. 2, p. 75-91, mayo/ago. 2013.

ARROYO, Indira; BRAVO, Luis; LLINAS, Humberto; MUÑOZ, Fabián. [Distribuciones Poisson y Gamma: una discreta y continua relación](#). *Prospect*, Bogotá, v. 12, n. 1, p.99-107, ene./jun. 2014.

BATANERO, Carmen. *Didáctica de la Estadística*. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística, 2001.

BATANERO, Carmen; BEGUÉ, Nuria; GEA, María Magdalena; ROA, Rafael. El muestreo: una idea estocástica fundamental. *Suma*, n. 90, p. 41-47, mar. 2019.

BATANERO, Carmen; BOROVCNICK, Manfred. *Statistics and probability in high school*. Rotterdam: Sense Publishers, 2016.

BATANERO, Carmen; TAUBER, Liliana Mabel; SÁNCHEZ, Victoria. [Students' reasoning about the normal distribution](#). In: BEN-ZVI, Dani; GARFIELD, Joan. (Ed.). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*. Dordrecht: Springer, 2004, p. 257-276.

BEN-ZVI, Dani; BAKKER, Arthur; MAKAR, Katie. [Learning to reason from simples](#). *Educational Studies in Mathematics*, v. 88, n. 3, p. 291-303, mar. 2015.

BIEHLER, Rolf; BEN-ZVI, Dani; BAKKER, Arthur; MAKAR, Katie. [Technological for enhancing statistical reasoning at the school level](#). In: CLEMENTS, McKenzie Alexander; BISHOP, Alan Paul; KEITEL, Christine; KILPATRICK, Jeremy; LEUNG, Frederick K. S. *Third International Handbook of Mathematics Education*. New York: Springer, 2013, p. 643-689.

CANTORAL, Ricardo; RÍOS, Wendolyne; REYES, Daniela; CANTORAL, Enrique; BARRIOS, Eleany; FALLAS, Rodolfo; BONILLA, Antonio. [Matemática Educativa, transversalidad y Covid-19](#). *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Ciudad de México, v. 23, n. 1, p. 1-19, 2020.

CRUZ-RAMÍREZ, Miguel; ÁLVAREZ-REYES, Salvador Eladio; PÉREZ-SANTOS, Francisco Javier. [Sobre la enseñanza de la Distribución de Poisson en carreras de Ingeniería](#). *Bolema*, Rio Claro, v. 28, n. 50, p. 1117-1134, dez. 2014.

EICHLER, Andreas; VOGEL, Markus. Three approaches for modelling situations with randomness. En: CHERNOFF, Egan J.; SRIRAMAN, Bharath. (Ed.). *Probabilistic thinking: presenting plural perspectives*. Heidelberg: Springer, 2014, p. 75-99.

FINZER, William. *Fathom dynamic data software*. Emeryville: Key Curriculum Press. 2007.

FONT, Vicenç; GODINO, Juan Díaz; GALLARDO, Jesús. [The emergence of objects from mathematical practices](#). *Educational Studies in Mathematics*, v. 82, n. 1, p. 97-124, 2013.

FRANKLIN, Christine; KADER, Gary; MEWBORN, Denise; MORENO, Jerry; PECK, Roxy; PERRY, Mike; SCHEAFFER, Richard. [Guidelines for assessment and instruction in statistics education \(GAISE\) report: A Pre-K- 12 curriculum framework](#). Alexandria, American Statistical Association, 2005.

GARCÍA-GARCÍA, Jaime; FERNÁNDEZ, Nicolás; IMILPÁN, Isaac. [Desarrollo del razonamiento probabilístico en profesores de Matemáticas mediante simulación computacional](#). *Paradigma*, Maracay, v. 41, n.2, p. 404-426, ago. 2020.

GARFIELD, Joan; BEN-ZVI, Dani; CHANCE, Beth; MEDINA, Elsa; ROSETH, Cary;

ZIEFFLER, Andrew. *Developing students' Statistical reasoning: connecting research and teaching practice*. Dordrecht: Springer, 2008.

GEA, María Magdalena; PARRAGUEZ, Rafael; BATANERO, Carmen. Comprensión de la probabilidad clásica y frecuencial por futuros profesores. En: INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XXII, 2018, Zaragoza. [Actas del XXI SIEM](#). Zaragoza: SEIEM, 2017, p. 267-276.

GODINO, Juan Díaz; BATANERO, Carmen; FONT, Vicenç. [The onto-semiotic approach to research in Mathematics Education](#). *ZDM Mathematics Education*, v. 39, n. 1-2, p. 127-135, jan. 2007.

GODINO, Juan Díaz; BATANERO, Carmen; FONT, Vicenç. The onto-semiotic approach: implications for the prescriptive character of didactics. *For the Learning of Mathematics*, New Westminster, v. 39, n. 1, p. 38-43, 2019.

GODINO, Juan Díaz; BURGOS, María; GEA, María Magdalena. [Analysing theories of meaning in mathematics education from the onto-semiotic approach](#). *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, v. 52, p. 1-28, mar. 2021.

GODINO, Juan Díaz; CONTRERAS, Angel; FONT, Vicenç. [Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática](#). *Recherches en Didactiques Mathématiques*, Grenoble, v. 26, n. 1, p. 39-88, 2006.

GODINO, Juan. [Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas](#). *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, Montes de Oca, v. 8, n. 11, p. 111-132, dic. 2013.

IZCARA, Simón. *Manual de investigación cualitativa*. México: Fontamara, 2016.

MUÑIZ-RODRÍGUEZ, Laura; RODRÍGUEZ-MUÑIZ, Luis. J.; ALSINA, Ángel. [Deficits in the statistical and probabilistic literacy of citizens: Effects in a world in crisis](#). *Mathematics*, v. 8, n. 11, p. 1-20, 2020.

PRATT, Dave; DAVIES, Neville; CONNOR, Doreen. [The role of technology in teaching and learning Statistics](#). En: BATANERO, Carmen; BURRILL, Gail; READING, Chris (Ed.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education*. A joint ICMI/IASE. New York: Springer, 2011, p. 97-107.

RAMÍREZ, Greivin. Formas de razonamiento que muestran estudiantes de maestría de Matemática Educativa sobre la distribución normal mediante problemas de simulación en Fathom. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, Buenos Aires, v. 3, n. 1, p. 10-23, ene./jul. 2008.

ROLDÁN-LÓPEZ, Antonio Francisco; BATANERO, Carmen; ALVAREZ-ARROYO, Rocío. [Conflictos semióticos relacionados con el intervalo de confianza en estudiantes de Bachillerato e Ingeniería](#). *Educação Matemática Debate*, Montes Claros, v. 4, n. 10, p. 1-25, 2020.

SALINAS, Jesús; VALDEZ, Julio; SALINAS-HERNÁNDEZ, Ulises. Un acercamiento

a la metodología lesson study para la enseñanza de la distribución normal. En: INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA XXII, 2018, Gijón. [Actas del XXII SIEM](#). Granada: SEIEM, 2018, p. 525-534.

SAMPIERI, Roberto. *Metodología de la investigación: las rutas cuantitativa, cualitativa y mixta*. México: McGraw Hill. 2018.

ZACKS, Shelemyahu. *Parametric statistical inference: basic theory and modern approaches*. Oxford: Pergamon Press. 2014.

Anexo — Ítems cuestionario diagnóstico

Ítem 1	Se sabe que los estudiantes ingresan a primer año de universidad tienen una edad promedio estimada de 20 años. Si en una muestra de 5 personas, las edades de 4 de ellas son: 18 – 19 – 20 – 19. ¿Cuál es la edad esperada para la quinta persona?
Ítem 2	Sea X la variable aleatoria definida por el número de respuestas correctas en una prueba de 5 preguntas. ¿Cuál es la función de probabilidad que representa a X ?
Ítem 3	Sea X la variable aleatoria definida por el número de respuestas correctas en una prueba de 5 preguntas. ¿Cuál es la función de distribución de la variable aleatoria X ?
Ítem 4	Sea X la variable aleatoria definida por el número de respuestas correctas en una prueba de 5 preguntas. ¿Cuál es la esperanza de la variable aleatoria X ?