



Metodologia para resolução de problemas de fenômenos físicos com equações diferenciais ordinárias

Methodology for solving problems of physical phenomena with Ordinary Differential Equations

João Bosco Laudares 

Saulo Furletti 

Júlio Paulo Cabral dos Reis 

Resumo:

Este artigo apresenta uma metodologia para o estudo de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), a partir da Resolução de Problemas privilegiando diversas representações de modelos. Ilustra-se por completo uma resolução, com os passos presentes na proposta metodológica, que direcionaram a análise dos modelos de equações e gráficos dos fenômenos físicos. O referencial teórico parte da matematização de fenômeno físico com Equações Diferenciais pela resolução de problemas, com base nas representações semióticas, diversificação de representações de objetos matemáticos e análise de modelos. A matematização é dimensionada por leis de movimentos, parâmetros quantitativos e qualitativos. Esta metodologia é resultado de um estudo para suporte aos professores e estudantes dos cursos das áreas de Ciências Exatas, que possuem em seus currículos a disciplina de Equações Diferenciais Ordinárias.

Palavras-chave: Resolução de Problemas. Metodologia. Equações Diferenciais.

Abstract:

This article presents a methodology to the study of Ordinary Differential Equations (ODE), from problem solving, favoring several representations of the models. Illustrates a solution, with the steps present in the methodological proposal, who directed the analysis of the models of equations and graphs of physical phenomena. The theoretical reference comes from of mathematization of phenomenon physical with differential equations and by problem solving, based on the semiotic representations, diversification of representations of mathematical objects and analysis of models. The mathematization is created by laws of motion and quantitative and qualitative parameters. This methodology is the result of studies and researches from Masters in Teaching Science and Mathematics at PUC Minas, to support teachers and students of the courses of the exact sciences that have the disciplines of Differential Ordinary Equations in their curriculum.

Keywords: Problem solving. Methodology. Differential Equations.

João Bosco Laudares
Doutor em Educação: História, Política, Sociedade pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Professor do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC Minas), Minas Gerais, Brasil. E-mail: jblaudares@terra.com.br

Saulo Furletti
Doutorando em Educação pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC Minas). Professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais (IFMG), Minas Gerais, Brasil. E-mail: saulofurletti@gmail.com

Júlio Paulo Cabral dos Reis
Mestre em Ensino de Ciências e Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC Minas). Professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais (IFMG), Minas Gerais, Brasil. E-mail: julio.cabral.reis@hotmail.com

Recebido em 23/04/2018
Aceito em 11/06/2018

1 Introdução

Neste artigo, apresenta-se uma metodologia para resolução de problemas com equações diferenciais ordinárias com análise de modelos representados por equações ou gráficos. O embasamento teórico encontra-se em elementos da resolução de problemas apresentada por Polya (1994), nas representações semióticas de Duval (2009), na diversificação de representações de objetos matemáticos: verbal, gráfica, algébrica e numérica, segundo Stewart (2013), e na perspectiva da modelagem matemática de Bassanezi (2002), quanto a análise de modelos na forma de equações e gráficos.

Busca-se um *desing* que concilia alguns aspectos das metodologias e teorias apresentadas, articulando várias representações para o estudo de fenômenos físicos. A proposta de ensino-aprendizagem por esta metodologia é adequada para um primeiro curso de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) para o ensino superior, e se alicerça em:

- (a) abordagem operacional do cálculo da solução de uma EDO;
- (b) abordagem pela resolução de problemas geométricos, na intramatemática, e de fenômenos físicos da intermatemática ou intercedências.

Recorre-se a Laudares *et al.* (2017), para apresentar um exemplo de resolução de problema de fenômeno físico seguindo a abordagem metodológica proposta.

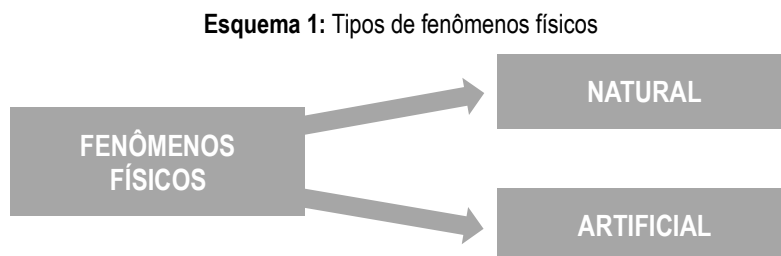
2 Conceito de fenômeno

A caracterização de um fenômeno físico se faz pela manifestação de mudanças ocasionadas por uma ação executada por um agente físico, químico, social, entre outros, num processamento dinâmico. Um fenômeno pode ser observado de maneira extraordinária por meio de movimento, experiência, percepção. Os termos ação, movimento, variação, mudança revelam a estrutura de um fenômeno. É um objeto de manifestação no tempo e num espaço que pode ser dimensionado por um observador, isto é, um acontecimento em ação, em processo, cuja ocorrência se faz por interações de sistemas.

No que se refere aos problemas de fenômenos físicos, Anton, Bivens e Davis (2007) sustentam a ideia de que as grandezas presentes variam com relação uma às outras, de modo que a velocidade de um foguete, a inflação de uma moeda, o número de bactérias de uma cultura, a intensidade de um tremor de um terremoto, a voltagem de um sinal elétrico, são exemplos de

variáveis presentes em problemas de fenômenos físicos, que são caracterizados por esses autores como aqueles que envolvem grandezas que variam.

Em complemento, Laudares *et al.* (2017) destacam a caracterização de dois tipos de fenômenos físicos (Esquema 1).



Fonte: Laudares *et al.* (2017, p. 93)

São compreendidos, em Laudares *et al.* (2017), como fenômenos físicos (a) Natural: aqueles que são provocados pela natureza física, independente do homem - o movimento das marés, a ação dos ventos, a gravidade, o movimento dos planetas e, (b) Artificial: aqueles que são provocados pelo homem - a produção de energia pelas hidrelétricas, pelo átomo, a produção de eletricidade com os circuitos, o motor, a bateria. Assim, pode-se concluir que problemas de fenômenos físicos envolvem variações de grandezas.

3 Matemática de fenômenos com Equações Diferenciais

Ao observar um fenômeno, em seu processo de variação, pode-se proceder a uma medição que requer uma analítica com instrumentação para aferir e tratar as informações com variáveis, com parâmetros, com sistema de unidades e escalas. Traduzir este processo inerente em uma linguagem simbólica específica, numa tentativa de sintetizar características de sua dimensão, constitui o que Laudares *et al.* (2017) chamam de matematizar o fenômeno, ou seja, a ação de matematização.

Portanto, matematizar é a ação que resulta numa manifestação sintética dos elementos observados, de suas relações e leis inerentes a um fenômeno processado, expressos em linguagem simbólica de uma das áreas específicas da Matemática. Ainda segundo os autores, ao observar um fenômeno, em seu processo de variação, pode-se estabelecer uma medição que requer uma analítica com instrumentação para aferir e tratar as informações com variáveis, com parâmetros, com sistema de unidades e escalas. Traduzir este processo inerente ao fenômeno em uma linguagem simbólica específica, numa tentativa de sintetizar características de sua

dimensão, constitui o ato de matematizar o fenômeno, ou seja, a ação de matematização.

A manifestação referida, segundo Bassanezi (2002) pode se apresentar como um modelo matemático do fenômeno. A Matemática tem instrumental simbólico adequado para modelar um fenômeno. Como linguagem simbólica escrita, apresenta-se, como possibilidade analítica e instrumental, o Cálculo Infinitesimal da Matemática. Laudares *et al.* (2017) consideram que no Cálculo Infinitesimal em sua base estrutural, pensada de forma introdutória e sem um grande rigor, estão as grandezas ou variáveis simbolizadas por x e y , tal que y depende de x , isto é, $y = f(x)$, e suas respectivas variações infinitesimais diferenciais dx e dy .

Entretanto, no estudo de fenômenos físicos usam-se variáveis que expressam as grandezas dependentes e independentes inerentes ao fenômeno. Pode-se pensar: (a) variável independente t (tempo) dos fenômenos físicos e (b) variáveis dependentes, podendo ser: T (temperatura), m (massa), i (intensidade de corrente no circuito). Pode-se dizer que o Cálculo estuda a “variação e movimento” (ZUIN, 2001, p. 13). Assim, a Matemática, por meio do Cálculo, ganha uma nova dimensão. A sua representação, ganha dinâmica e, a partir dos movimentos, novos conceitos são incorporados, conforme ilustra o Esquema 2.

Esquema 2: Movimento - variação



Fonte: Laudares *et al.* (2017, p. 94)

O fenômeno, um acontecimento com plena ativação, e em contínuo processo de variação com movimento, se manifesta por uma configuração dimensional (que pode ser medida, modelada por uma observação caracterizada pelo uso de unidades de medida). Dessa forma, Laudares *et al.* (2017) afirmam que todo fenômeno se oferece para ser medido, dimensionado a partir de uma observação, expressa por processos quantitativos ou qualitativos, por modelos definidos por parâmetros medidores, tal como a variação do tempo, conforme Esquema 3.

Esquema 3: Matematização

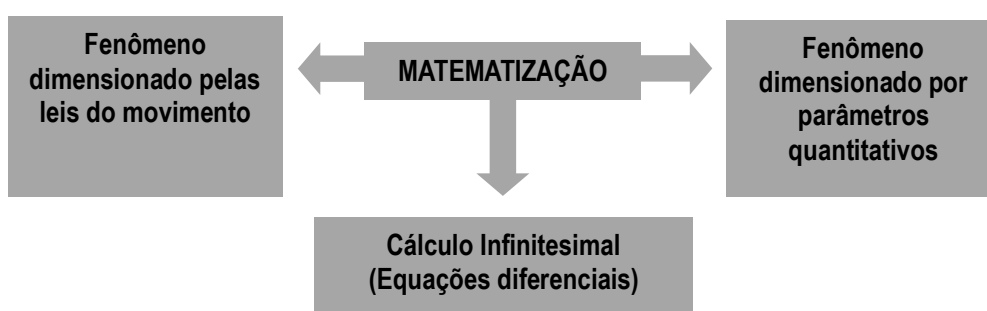


Fonte: Laudares *et al.* (2017, p. 94)

Na matematização, no ensino superior, a instrumentação criada para medir pode se

configurar por conceitos como o de limite, derivada, diferencial e integral, a partir do cálculo infinitesimal. Para modelagem matemática, as equações diferenciais se apresentam como instrumento adequado para a representação e configuração de muitos fenômenos. Problemas, como os de transferência de calor, de difusão, de fluxos de potencial, da teoria da elasticidade, de planos de tensão e planos de deformação, de decaimento exponencial, misturas, aquecimento/resfriamento, queda-livre, dentre inúmeros outros podem ser modelados e trabalhados de modo por Equações Diferenciais Ordinárias, como mostra o Esquema 4.

Esquema 4: Instrumentação para representação de fenômenos



Fonte: Laudares *et al.* (2017, p. 94)

Em síntese, tem-se que um fenômeno, observado quanto as duas variáveis x e t (tempo), e de seus acréscimos “ $\Delta x = dx$ ” e “ $\Delta t = dt$ ”, ao entrar em processo de contínua variação, é expresso, muitas vezes, por uma equação diferencial $dx/dt=f(x,t)$. Deste modo, pela matematização, as Equações Diferenciais são bons modelos para exprimir alguns fenômenos físicos.

4 Estudo de um fenômeno pela Resolução de Problema

O fenômeno pode gerar uma situação na qual se configura uma problematização, isto é, a determinação de um problema, a ser delineado com seus parâmetros definidores e que possui muitas vezes um instrumento ou um modelo pronto e acabado para trazer a solução, ou para sua manifestação imediata.

Nesta perspectiva, salienta-se que uma situação só pode ser compreendida como um “problema na medida em que existe um reconhecimento dela com problema por parte do aluno e na medida em que este não dispõe de procedimentos de tipo automático que lhe permitam solucioná-la de forma mais ou menos imediata” (POZO, 2008, p. 253). Assim, entende-se que um problema exige um processo de reflexão com tomada de decisões, e que a partir de uma

sequência de passos, podem-se conduzir o aluno durante a resolução de um problema ao enfatizar aspectos para a análise de fenômenos físicos e, em decorrência, reflexões para as decisões no caminho da solução. Dessa forma, os passos presentes na metodologia proposta, não se caracterizam uma padronização que automatiza de procedimentos, pois se sustentam em situações novas e contextualizadas para que o aluno reflita e tome decisões.

Para Onuchic o Allevato (2014), a resolução de problemas concentra-se em ajudar os estudantes em compreender conceitos, processos e técnicas operatórias necessárias para a busca da solução, levando em consideração uma dinâmica específica e o conteúdo abordado. Segundo Polya (1994), como não há um procedimento padrão para resolver problemas, ao procurar a solução pode-se determinar algumas fases ou passos que orientem o processo de resolução:

- (1) *Compreender a situação que define o problema*, o qual é descrito verbalmente por um enunciado; então se exige uma leitura cuidadosa e analítica das partes que compõem o enunciado;
- (2) *Estabelecer de um plano diretor* no qual se busca a relação dos dados e informações: parâmetros, incógnitas, leis, propriedades;
- (3) *Executar o plano*, isto é, desenvolvimento dos passos formalizados no plano: resolução de equações, cálculos, traçado de diagramas e gráficos;
- (4) *Retrospecto da resolução*, análise e avaliação da solução determinada, compatibilizando dados iniciais com esta mesma solução.

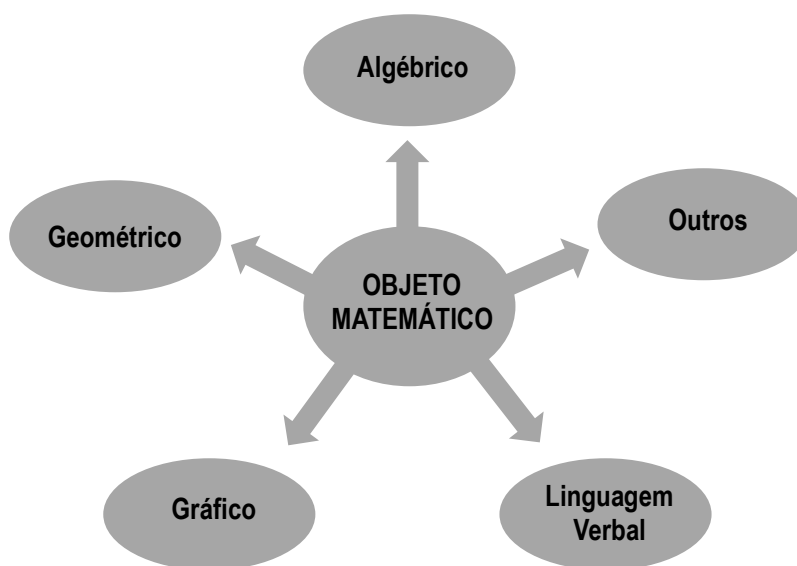
5 Representações e Modelos

Segundo Stewart (2013) e Duval (2009), o aprendizado em Matemática acontece ou é potencializado quando se utiliza as variadas representações para um mesmo objeto matemático, como podemos observar no Esquema 5.

Na teoria de Duval (2009), quando o estudante é capaz de trabalhar com pelo menos duas representações para um mesmo objeto matemático, o conhecimento matemático se dá de forma significativa. Para compreender, de modo introdutório, pode-se pensar em um sistema linear, como um objeto matemático para solucionar uma situação-problema. Tal sistema linear pode ser expresso na representação algébrica (por um conjunto de equações lineares), na representação

gráfica/geométrica (por meio de retas no plano cartesiano) ou ainda, ser analisado na linguagem verbal. A transição por estas diversificadas representações, do mesmo objeto matemático, para Duval (2009), evidencia o aprendizado do estudante sobre tal objeto. Pode-se ainda pensar em uma situação-problema que traz o objeto parábola, como modelo de solução; este objeto pode ser expresso na linguagem algébrica ($y = ax^2 + bx + c$, com seu respectivo domínio), na linguagem gráfica ou ainda verificar que o fenômeno tem um comportamento parabólico.

Esquema 5: Diversidade de representações para um objeto matemática



Fonte: Elaborado pelos autores

Stewart (2013), na sua obra de Cálculo, apresenta diretrizes para resolução de um problema pela regra das quatro representações, chamada de “Regra de Quatro”: (1) tratamento algébrico; (2) tratamento geométrico/gráfico; (3) tratamento numérico/tabelas de dados; (4) descrição verbal na língua natural da situação em contexto e da problematização, que o mesmo autor chama de regra das quatro abordagens, sugerindo o trabalho no movimento pelas quatro representações, sempre que possível, do mesmo objeto estudado.

Stewart (2013) traz para o estudo de funções, limites, derivadas e integrais o movimento por estas representações. Uma função é estudada na linguagem natural, por representações em tabelas, em gráficos e na linguagem algébrica, recorre-se as vezes a tecnologia da informação e comunicação, como aporte pedagógico, para se trabalhar tal movimento.

Assim, um mesmo modelo pode ser expresso por variadas representações e, em Duval (2009) e Stewart (2013), o trabalho com estas diversificadas representações pode contribuir aos processos de ensino e aprendizagem de forma significativa.

6 Metodologia e estrutura

A metodologia criada para a obra editada de Laudares *et al.* (2017) foi baseada nas metodologias Resolução de Problemas, de Polya (1994), e Modelagem Matemática, de Bassanezi (2002); na proposta de ensino e aprendizagem para Cálculo Diferencial e Integral de Stewart (2013), e na Teoria das Representações Semióticas, de Duval (2009). Esta forma de abordagem recebe o nome de *Metodologia de Passos* e possui um *design* próprio.

Abordar um problema por meio de passos pode permitir ao estudante fazer uma análise (estudo em partes) da situação e assim facilitar a sua compreensão a fim de elaborar em linguagem natural uma síntese (estudo global), que possibilita verificar a aprendizagem. O transitar pelas variadas representações, fará o estudante analisar e refletir um mesmo fenômeno expresso nas mais variadas linguagens. Nestas transições, o aprendizado pode ser estabelecido de forma natural. O esboço do *design* da Metodologia de passos é apresentado no Quadro 1.

Quadro 1: Metodologia de passos

Enunciado – Problema o qual se pretende resolver.

Questões – As quais serão analisadas durante o processo.

Fonte: Laudares *et al.* (2017)

Assim, a metodologia de passos segue oito passos para focar uma aprendizagem significativa e, durante estes passos, reflexões, análises e transições de representações são estabelecidas:

Interpretação do enunciado – Compreende-se aqui o enunciado na linguagem natural;

1º Passo: Matematização do fenômeno físico por uma lei física – busca-se compreender o enunciado e as questões propostas, por um modelo que auxilie na resolução do problema dado e a linguagem algébrica é instaurada;

2º Passo: Constantes dadas – substituição na equação do fenômeno – elabora-se uma linguagem algébrica a fim de passar da linguagem natural para a linguagem algébrica;

3º Passo: Condições iniciais ou de contorno – retiradas do enunciado;

4º Passo: Resolução da Equação Diferencial do modelo – buscam-se métodos da disciplina de EDO para resolver o modelo;

5º Passo: Cálculos solicitados nos problemas: explicitar o que se pede – técnicas de

manipulações algébricas;

6º Passo: Modelo das equações do fenômeno – representação algébrica do fenômeno;

7º Passo: Modelo dos gráficos do fenômeno – representação figural do fenômeno;

8º Passo: Descrição sintética do fenômeno num pequeno texto – compreensão de todo o contexto na linguagem verbal ou descritiva, a partir, da análise das representações anteriores e Cálculos realizados;

Resolver uma situação-problema demanda o desencadeamento do raciocínio, que é feito por meio do desenvolvimento destas etapas ou passos. Evidentemente, a Física e a Matemática estão envolvidas intrinsecamente nos problemas, mas pode-se, para efeito de estudo, separá-las. No estudo específico de Equações Diferenciais, tem-se interesse na lei física que será dada no enunciado do problema. Inicialmente, pode-se buscar pela expressão matemática com dados da situação-problema e dos conhecimentos básicos das outras ciências como a Física, Química, entre outras. Preocupa-se com os desenvolvimentos da expressão matemática, que envolverá a resolução da Equação Diferencial, pela interpretação das condições iniciais ou de contorno para determinação dos coeficientes e constantes de integração.

Cabe ressaltar que matematizar, para Laudares *et al.* (2017), é fazer uma análise da situação problemática e expressar matematicamente o problema, o qual retrata um fenômeno em estudo, o que se configura dentro da visão de Modelagem Matemática apresentada por Bassanezi (2002). A matematização, apoiada pela informática, tem conquistado um espaço de destaque, pois pode facilitar os cálculos operacionais e permitir mais tempo de análise reflexiva para interpretação das propriedades e das características dos processos.

Durante os oito passos propostos nota-se a preocupação de que o estudante perpassasse por pelo menos duas representações do mesmo fenômeno, presente no problema. Pode-se passar por até mais representações, pois Duval (2009) considera que “a compreensão em matemática implica na capacidade de mudar de registro” (p. 21), e que a compreensão se dá, quando o estudante é capaz, para um mesmo objeto matemático, registrá-lo e/ou representá-lo, de pelo menos duas formas diferentes. Logo, na metodologia de passos, há a preocupação de trabalhar com variadas representações, e refleti-las modo a construir o aprendizado.

O processo de passos também auxilia nas representações sugeridas por Stewart (2013), uma vez que o aluno perpassa pela linguagem natural, linguagem algébrica, representações gráficas, representações figurais e retorna à linguagem natural (verbal/descritiva) para validar as

compreensões durante o processo. A verbalização para Stewart (2013) facilita a compreensão. Assim, a metodologia busca a compreensão do estudante, em uma amplitude que forneça além de uma aprendizagem significativa a autonomia.

Os próprios passos se configuram em propostas da Resolução de Problemas de Polya (1994), pois é um processo dinâmico e não linear, em que o estudante pode avançar e retroceder conforme compreenda a necessidade dos mesmos, a fim de obter uma resposta condizente para o problema. Quanto melhor a compreensão, maior será a autonomia, permitindo, inclusive, investigações. Desse modo, a metodologia proposta não engessa o estudante, pelo contrário, busca conduzi-lo a reflexões de modo que ao final possa compreender, com certa autonomia, o problema de fenômeno físico que envolva a resolução EDO.

Na sequência, Quadro 2, exemplifica-se com um problema retirado de Laudares *et al.* (2017), no qual a resolução se baseia na metodologia de passos.

Tema: Decaimento exponencial

Problema de decomposição do elemento radium

Problema de Valor Inicial – PVI e Problema de Valor de Contorno – PVC

Quadro 2: Enunciado do problema

ENUNCIADO
<p>Dados</p> <p>(I) O elemento químico “radium” se decompõe naturalmente em proporção direta à quantidade presente;</p> <p>(II) Leva 250 anos para decompôr 10% de uma certa quantidade de radium;</p> <p>Questões – Compreendendo o problema</p> <p>(III) Determine a massa do radium em função do tempo</p> <p>(IV) Determine em quantos anos será decomposta metade da quantidade inicial do radium</p> <p>(V) Determine os modelos de equações do fenômeno</p> <p>(VI) Esboce os gráficos das equações</p> <p>(VII) Descreva num pequeno texto o fenômeno comparando os gráficos e as equações</p>

Fonte: Laudares *et al.* (2017)

No exemplo, cada item (I), (II), ..., (VII), busca estabelecer a metodologia de Resolução de Problemas e perpassar por variadas representações, além de buscar modelos compatíveis com o

fenômeno descrito. No item VII, a verbalização juntamente com uma reflexão, de modo, a verificar a compreensão do estudante é estabelecida. Assim, a resolução da situação-problema, que se configura em problema de fenômeno físico é apresentada.

1º Passo: Matemática da Lei Física. Buscando um modelo, configurando a linguagem algébrica, compreendendo o problema.

Identificação das variáveis - pode ser estabelecida por um modelo na linguagem algébrica, onde: m - massa do radium; t - tempo; k - constante de proporcionalidade.

Interpretando o item I do enunciado, a lei física pode ser expressa, matematicamente, da seguinte forma:

$$\frac{dm}{dt} = km \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{dm}{dt} - km = 0} \quad (1)$$

2º Passo: Modelos e significados das Equações

(1) Velocidade de decomposição: $\frac{dm}{dt}$ em função da massa m .

(2) Velocidade de decomposição: $\frac{dm}{dt}$ em função do tempo t .

(3) A massa do elemento químico m em função do tempo t

A compreensão da linguagem algébrica adotada, a partir de elementos do Cálculo Diferencial e Integral.

3º Passo: Condições dadas

Condição inicial: $t = 0$ ano $\Rightarrow m = 1$ (100%, total de massa presente no instante inicial).

Condição de contorno: $t = 250$ anos $\Rightarrow m = 0,9$ (90% de massa restante, 10% de decomposição).

Observação: m = massa em quilograma.

4º Passo: Determinação da massa em função do tempo. Utilizando um método e um modelo, na

busca pela solução da situação-problema.

A solução da Equação Diferencial (modelo já existente para decaimento exponencial), a qual representa a velocidade de decomposição, com a aplicação das condições dadas. Utilizando o método de separação de variáveis:

$$\text{s.v. } \frac{dm}{dt} = km \quad \Rightarrow \quad \frac{dm}{m} = k dt$$

$$\text{Integrando} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dm}{m} = \int k dt$$

$$\text{Temos: } \log_e m = kt + c_1 \quad \Rightarrow \quad m = e^{kt+c_1} \Rightarrow m = e^{kt} e^{c_1}, \text{ fazendo } e^{c_1} = c$$

Fazendo $e^{c_1} = c$ temos:

$$m = m(t) = ce^{kt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{m = ce^{kt}} \quad (2)$$

A determinação c e k se faz, aplicando as condições dadas:

$$\begin{cases} t = 0 \\ m = 1 \end{cases} \Rightarrow 1 = c e^{k \cdot 0} \quad \therefore \quad c = 1$$

Portanto, $m = 1 e^{k t}$ ou $m = e^{k t}$

$$\begin{cases} t = 250 \\ m = 0,9 \end{cases} \Rightarrow 0,9 = e^{250k}$$

$$\text{ou } k = \frac{\log_e 0,9}{250} = -4,21 \cdot 10^{-4} = -0,000421,$$

Finalmente:

$$\boxed{m = e^{-0,000421t}} \quad (3)$$

Esta é a expressão que dá m em função de t .

Até este passo, a representação mais utilizada para o objeto em estudo é a linguagem algébrica, que é compreendida pela linguagem verbal estabelecida. Além, busca-se modelos, já existentes, para expressar a situação-problema.

5º Passo: *Cálculo da meia-vida.* Resolvendo a questão diretriz do problema

Cálculo do tempo (t em anos) para decomposição da metade da massa. Substituir $m = \frac{1}{2}$ na equação da massa em função do tempo: $m = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} = e^{-0,000421t}$, Aplicando logaritmo e isolando t, temos: $t \approx 1646,43$ anos.

6º Passo: *Equações definidoras do fenômeno.* Representação Algébrica do Fenômeno.

(1) Velocidade de decomposição da massa em função da massa m. Levando o valor de “k” na equação da decomposição, teremos:

$$\frac{dm}{dt} = km \Rightarrow \boxed{\frac{dm}{dt} = -0,000421 m} \quad (4)$$

(2) Velocidade de decomposição da massa em função do tempo. Derivar a equação de “m” em função de “t”:

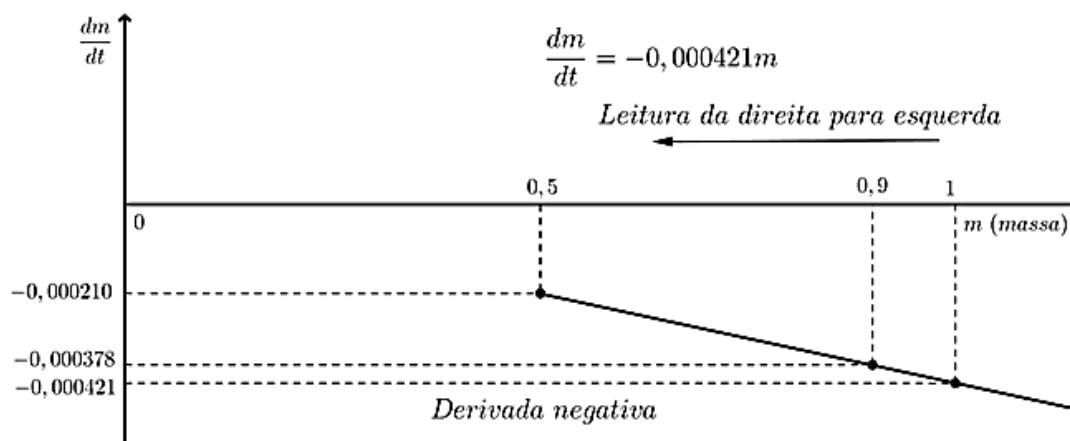
$$m = e^{-0,00042t} \Rightarrow \boxed{\frac{dm}{dt} = -0,000421 e^{-0,00042t}} \quad (5)$$

(3) Variação da massa em função do tempo.

$$\text{Equação de } m \text{ em função de } t \Rightarrow \boxed{m = e^{-0,00042t}} \quad (6)$$

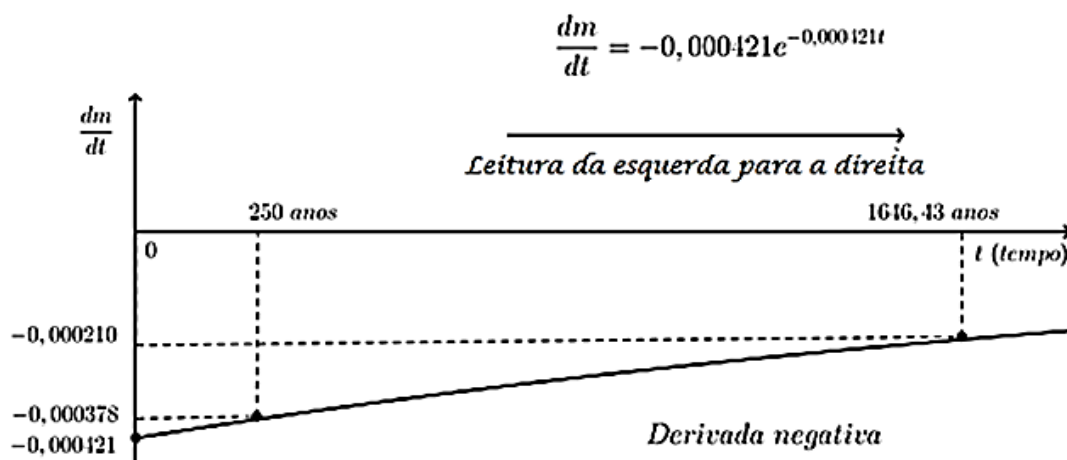
7º Passo: *Esboçar os gráficos das equações.* Representação Figural do Fenômeno

Gráfico 1: Velocidade de decomposição da massa em função da massa (Esquema 4)



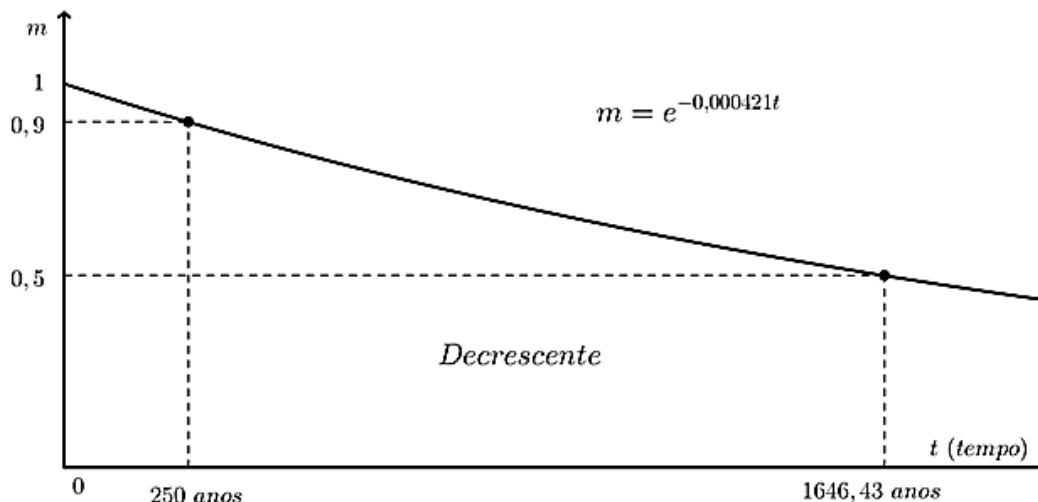
Fonte: Laudares *et al.* (2017)

Gráfico 2: Velocidade de decomposição da massa em função do tempo (Esquema 5)



Fonte: Laudares et al. (2017)

Gráfico 3: Variação da massa em função do tempo (Esquema 6)



Fonte: Laudares et al. (2017)

Neste passo o fenômeno é compreendido, em outra representação, a gráfica/figural, da linguagem algébrica para a linguagem gráfica, porém o elemento de estudo ainda é o mesmo fenômeno descrito na situação-problema. Variados gráficos são traçados, de acordo com os modelos estudados na linguagem algébrica, diversificando as representações do fenômeno, de modo, a compreendê-lo de forma mais detalhada.

8º Passo: Compreensão do comportamento do fenômeno estudado. Refletindo o Problema:

aprendizagem significativa – verbal/descritivo).

- 1) Porque o (gráfico 1) $\frac{dm}{dt}$ é uma função linear?
- 2) Quando o tempo cresce no (gráfico 2) $\frac{dm}{dt}$, o que ocorre com a velocidade de decomposição $\frac{dm}{dt}$?
- 3) Analise o (gráfico 1) $\frac{dm}{dt}$ e o (gráfico 2) $\frac{dm}{dt}$ quanto à variação de sinal (positivo/negativo) de $\frac{dm}{dt}$ e seus valores.
- 4) Qual o valor da velocidade de decomposição no tempo inicial no (gráfico 1) $\frac{dm}{dt}$ e no (gráfico 2) $\frac{dm}{dt}$?
- 5) Dê o comportamento da variação de massa em relação ao tempo, no gráfico 3, para um tempo crescente. Obs.: Variação do radium Crescimento/Decrescimento e variação da derivada positiva/negativa
- 6) Lendo os três gráficos, para $m = \frac{1}{2}$, verifique o tempo e a velocidade de decomposição.
- 7) Determine o valor mínimo da massa para um tempo crescente.
- 8) A partir do seu entendimento do comportamento do fenômeno, escreva um texto comparando os gráficos e as equações.

O oitavo passo, trabalha na linguagem natural, para observar aprendizagens adquiridas durante a aplicação da metodologia de passos. É uma síntese reflexiva dos passos anteriores percorridos. Aqui o estudante é convidado a expor suas conclusões mediante as observações do fenômeno expresso por modelos, sejam estes, na linguagem algébrica e/ou gráfica/figural. Tenta-se aqui, explorar a linguagem natural, isto é, a verbalização das conclusões, a partir das soluções obtidas, da interpretação dos gráficos traçados e/ou ainda pelas observações ao decorrer dos passos.

7 Considerações

A proposta metodológica apresentada foi planejada a partir de pesquisas e estudos do Grupo de Pesquisa e Estudos de Metodologia e Informática (GRUPIMEM), do Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUCMinas).

A partir da experiência dos autores na sala de aula e em pesquisas e estudos no grupo referido, moldou-se uma proposta para abordar o conteúdo de Equações Diferenciais Ordinárias, partindo de uma sistematização metodológica por meio de uma sequência de passos. A base para organização dessa proposta situa-se na Resolução de Problemas, na diversificação de representações e em modelos matemáticos/físicos. Aponta-se que a estruturação metodológica de abordagem do problema enfatiza um *design* próprio que foi construído para o estudante realizar a análise e a interpretação da situação problema, promovendo desencadeamento do raciocínio lógico, por meio do desenvolvimento de etapas (passos).

O método de resolução por passos, não é limitado na memorização de algoritmos e processos fixos, pois demanda análise e interpretação dos fenômenos físicos pelo estudo dos modelos que o definem em várias representações, especialmente a gráfica agregada à algébrica.

Entendemos que essa proposta pode gerar experimentações, para uma ressignificação de alguns aspectos do processo de ensino-aprendizagem, por percursos exploratórios metodologicamente organizados para análise e compreensão de problemas de fenômenos físicos com Equações Diferenciais Ordinárias. Assim, essa forma de abordagem se configura como uma alternativa para a melhoria da aprendizagem de EDO.

Referências

ANTON, Howard; BIVENS, Irl; DAVIS, Stephen. *Cálculo*. Tradução de Claus Ivo Doering. 8. ed. Artmed. 2007.

BASSANEZI, Rodney Carlos. *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática*. São Paulo: Contexto, 2002.

DUVAL, Raymond. *Semiósis e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

LAUDARES, João Bosco; MIRANDA, Dimas Felipe de; REIS, Júlio Paulo Cabral; FURLETTI, Saulo. *Equações Diferenciais Ordinárias e Transformadas de Laplace*. Belo Horizonte: Artesã, 2017.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática: por que através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, Lourdes de la Rosa *et al.* (Org.). *Resolução de problemas: teoria e prática*. Jundiaí: Paco Editorial, 2014, p. 35-52.

POLYA, George. *A arte de resolver problemas*. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 1994.

POZO, Juan Ignacio. *Aprendizes e mestres: a nova cultura da aprendizagem*. Tradução de Ernani Rosa. Porto Alegre: Artmed, 2008.

STEWART, James. *Cálculo*. v. 2. Tradução de Antônio Carlos Moretti e Antônio Carlos Gilli Martins. São Paulo: Pioneira Thonson Learning, 2013.

ZUIN, Elenice de Souza Londron. Cálculo: uma abordagem histórica. In: LAUDARES, João Bosco. LACHINI, Jonas. (Org.). *A prática educativa sob o olhar de professores de Cálculo*. Belo Horizonte: Fumarc, 2001, p.13-38.