

# Metodologias ativas de aprendizagem nas aulas de Matemática: equação da circunferência e construção criativa de pontes

## Active learning methodologies in Mathematics: circumference equation and creative bridge construction

Greiton Toledo de Azevedo

Marcus Vinícius Maltempi

**Resumo:** Temos por objetivo investigar e compreender o processo de aprendizagem do conteúdo equação da circunferência a partir da produção criativa de pontes de cobertura circular. Norteados pelas Metodologias Ativas de Aprendizagem, a produção de dados foi realizada com os alunos do 3º ano do Ensino Médio do Instituto Federal Goiano, em Ipameri (GO). Os dados produzidos foram analisados a partir de elementos do construcionismo identificados nas atividades realizadas. Os resultados dão indícios para compreender o processo de aprendizagem da equação da circunferência a partir da produção de pontes criativas em um movimento dinâmico, coletivo e não linear, privilegiando aspectos da construção de ideias/significados da Geometria Analítica e corroborando a importância da aprendizagem ativa contextual-criativa e argumentativo-reflexiva em sala de aula.


**Palavras-chave:** Aprendizagem de Matemática. Metodologia Ativa de Aprendizagem. Pontes.


**Abstract:** We aim to investigate and understand the learning process of the circumference equation content from the creative production of circular roof bridges. Guided by the Active Learning Methodologies, data production was performed with the students of the 3rd year of Goiano Federal Institute High School, in Ipameri (GO). The data produced were analyzed from elements of constructionism identified in the mobilized activities. The results provide clues to understand the learning process of the circumference equation from the production of creative bridges in a dynamic, collective and nonlinear movement, emphasizing aspects of the construction of ideas / meanings of Analytical Geometry and corroborating the importance of active learning, contextual-creative and argumentative-reflective in the classroom.

**Keywords:** Mathematical learning. Active Learning Methodology. Bridges.

## 1 Introdução

O universo das metodologias ativas de aprendizagem no cenário educacional é um caminho possível para se pensar os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática do Ensino Médio (EM) tendo o aluno como pensador criativo. Não se pode ensinar criatividade, pois isso descaracterizaria a essência de pensar, criar e inventar criativamente. Porém, é possível

**Greiton Toledo de Azevedo**   
Doutorando em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista (UNESP), campus Rio Claro. Professor do Instituto Federal Goiano, campus Ipameri. Goiás, Brasil. ✉ [greiton.azevedo@ifgoiano.edu.br](mailto:greiton.azevedo@ifgoiano.edu.br)

**Marcus Vinícius Maltempi**   
Doutor em Engenharia Elétrica (UNICAMP). Professor do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista (UNESP), campus Rio Claro. São Paulo, Brasil. ✉ [marcus.maltempi@unesp.br](mailto:marcus.maltempi@unesp.br)

Recebido em 19/07/2019  
Aceito em 22/08/2019  
Publicado em 01/09/2019

estimulá-la nos mais diferentes contextos de aprendizagem, pois “todas as crianças nascem com a capacidade de serem criativas, mas sua criatividade não necessariamente se desenvolverá sozinha. Suas necessidades devem ser nutridas, encorajadas e apoiadas” (RESNICK, 2017, p. 21). Nesse sentido, nosso entendimento não é o de ensinar criatividade nas aulas de Matemática, mas de incentivá-la a partir do seu processo formativo, sem deixar de lado a essência de imaginar e inventar criativamente.

Olhamos para a criatividade da construção de pontes à luz do conhecimento de equação da circunferência como processo dinâmico-inventivo e caracterizado pela imaginação, originalidade e criação-produção de artefatos curiosos, que não obedecem necessariamente à uma lógica linear de aprendizagem (RESNICK, 2017; AZEVEDO *et al.*, 2019). A aprendizagem não é vista como receita do tipo *faça isso, depois aquilo e não se esqueça de repetir isso 50 vezes*. Pelo contrário, o processo de produzir criativamente nas aulas de Matemática quanto ao conteúdo de equações geral e reduzida da circunferência, envolvendo conceitos e propriedades, a partir da construção de réplicas de pontes, é empreendido como proposta ativa de aprendizagem, pautando-se pela insubordinação ao treino do conteúdo em sala de aula.

Nesse sentido, este trabalho é entendido como lugar para vivenciar experiências em Matemática como modo de vida e não como ação mecânica e formalismos que tendem a minar a forma de pensar e criar do aluno, e tem por objetivo investigar e compreender o processo de aprendizagem do conteúdo de equação da circunferência a partir da produção criativa de pontes. Damos enfoque ao processo de aprendizagem da equação da circunferência situado em um ambiente específico de aprendizagem à luz das metodologias ativas. Partimos do princípio de investigar e compreender os fatores que influenciam esse processo de construção de significado e ideias de Matemática pelo coletivo, que centram no desenvolvimento da aprendizagem do aluno. Nesse sentido, entendemos que os alunos podem assumir, durante o processo formativo, a posição de ativo-construtores quanto ao seu processo de aprendizagem, uma vez que nada é dado pronto a eles, mas são favorecidas situações para que possam pensar, conjecturar e compreender um assunto de Matemática de forma contextual-aplicada, além de ter a chance de errar e encontrar soluções para os desafios encaminhados de forma dialógico-questionadora e argumentativo-ativa do conteúdo mobilizado.

Assim, por sabermos que as relações estabelecidas entre os diferentes atores em sala de aula não são neutras, elas acabam influenciando de alguma forma como o aluno se apropria de

conceitos matemáticos e como a sua formação é feita ao interagir e criar juntamente como o outro. Uma apropriação não encapsulada de códigos e formalismos. Entendemos que, ao trabalhar com a produção de pontes criativas nas aulas, prestigiando-se o conteúdo de Geometria Analítica, o aluno pode ser incentivado a questionar ideias intuitivas do conteúdo, a sistematizar conceitos; a propor soluções para problemas específicos e a resolver desafios encaminhados, propondo um processo de formação que não se reduz ao teste padronizado.

As ações das atividades foram pensadas à luz das metodologias ativas e foram realizadas com os alunos do 3º ano do Ensino Médio do Instituto Federal Goiano, em Ipameri (GO). O trabalho estrutura-se em três principais cenários quanto ao processo de aprendizagem da equação da circunferência à luz da produção de réplicas de pontes de cobertura circular. Nos dois primeiros momentos, em forma de fragmento-recortes, evidenciamos a aprendizagem do aluno quanto ao conteúdo da equação da circunferência de forma ativo-engajada e reflexivo-argumentativa, pautando-se nos pressupostos do construcionismo (PAPERT, 1994; MALTEMPI, 2012; AZEVEDO, 2017; AZEVEDO *et al.*, 2018; AZEVEDO, MALTEMPI e LYRA, 2019). Em sequência, de forma dialógica, destacamos as produções criativas de pontes pelos alunos ao longo de um processo dinâmico, contextual-aplicado e não linear de aprendizagem, dando sentido ao conteúdo matemático do Ensino Médio e, por conseguinte, contribuindo com processo formativo do aluno da Educação Básica.

## 2 Metodologias Ativas de Aprendizagem nas aulas de Matemática

*O que torna a Matemática da Escola tão repugnante para os Brians, e chata para o Henrys, não é que ela seja difícil, mas por que é um ritual sem sentido, ditado por um currículo estabelecido que diz: "Hoje, por ser a décima quinta segunda-feira da quinta série, você tem que fazer essa soma, independentemente de quem você é ou do que você realmente deseja fazer; faça o que lhe mandam e faça da maneira como mandam!" (PAPERT, 1994, p. 54)*

O ensino e a aprendizagem escolar podem despertar a repulsa e o bloqueio do aluno pelo saber e fazer Matemática, como destaca Seymour Papert acima. De lá pra cá, muita coisa no sistema educacional não mudou (RESNICK, 2017). Repete-se o que a tradição sedimentou, impulsionando um sistema de ensino fragmentado, isolado e burocrático, sem dar a chance de o aluno explorar, inventar e construir ativo e criativamente o seu conhecimento em sala de aula (AZEVEDO, 2017). Em ventos contrários a esse contexto sedimentado e definido histórico-

culturalmente pela reprodução do conhecimento, as metodologias ativas buscam promover o processo formativo do aluno, privilegiando a sua autonomia, investigação e criatividade ao construir conhecimentos científicos e empíricos sem se reduzir ao compasso do treinamento de conteúdos curriculares e processos lineares. É um processo biunívoco de aprendizagem no qual tanto aluno e professor interpretam o seu meio, levantam hipóteses, analisam contextos e constroem junto-engajadamente ideias e o conhecimento mobilizado.

As metodologias ativas de aprendizagem enfatizam que a aprendizagem pode ser potencializada em forma de projetos, no qual se destina mais tempo para criação de artefatos, discussão de ideias matemáticas e construção de conhecimento entre os integrantes de forma engajado-criativa. É necessária, porém, que a atividade do projeto seja um espaço motivador e não seja limitada ao currículo e nem reduzida a uma "[...] sequência de passos predefinidos, é preciso que o aprendiz tenha tempo suficiente para se relacionar com a tarefa e, assim, executá-la, tendo a participação ativa do professor como problematizador e mediador do processo de aprendizagem" (MALTEMPPI, 2008, p. 25). A proposta de se trabalhar com as metodologias ativas nas aulas de Matemática pressupõe coragem de "romper com as limitações do cotidiano, muitas vezes auto-impostas pelo sistema" (ALMEIDA e FONSECA JÚNIOR, 2000, p. 22), o que implica repensar o processo de aprendizagem de Matemática como um espaço de formação, de autonomia e criatividade, e não deve ser empreendida como uma opção puramente metodológica ou restrita ao próprio sistema escolar.

Entendemos as metodologias ativas como um processo ativo e participativo de aprendizagem do aluno, que não recebe nada pronto, tampouco "mastigado" pelo professor, negando-se, portanto, a ideia que um bom caminho para que a aprendizagem se reduza ao aperfeiçoamento da instrução ou do acúmulo excessivo do ensino. A partir dessa interpretação, entendemos que as metodologias ativas dialogam fortemente com as ideias preconizadas pelo construcionismo, referencial teórico que norteia nossas ações pedagógico-científicas e teórico-filosóficas.

### **3 Construção de conhecimento matemático à luz do construcionismo**

Ao longo de décadas, Piaget e seus colaboradores desenvolveram uma teoria de grande valor para a compreensão do desenvolvimento humano, chamada Construtivismo. Influenciados por essa teoria e por trabalhos em computação e inteligência artificial, Papert e colaboradores

elaboraram o que ficou conhecido por Construcionismo. Destacamos que o foco central dos estudos de Papert não era o computador, mas a mente humana *com* o computador, ou seja, o desenvolvimento humano e social com uma tecnologia singular, sem precedentes.

Conforme Papert (1994), o construcionismo diz respeito a um conjunto de ideias que visa mostrar alternativas para teorias voltadas à supervalorização do ensino e do abstrato, que se constitui em obstáculo para a educação por privilegiar conteúdos dissociados dos problemas da sociedade e das situações que dizem respeito ao contexto do aluno. Papert via no computador a possibilidade de mudar os limites entre o concreto e o abstrato, pois esse permite manipular concretamente conhecimentos que só eram acessíveis por meio de formalizações abstratas, tornando desnecessário o segundo estágio piagetiano do construtivismo.

Assim, as ideias construcionistas se opõem ao entendimento de que para uma melhor aprendizagem deve haver um aperfeiçoamento da instrução, sem, no entanto, colocar “[...] em dúvida o valor da instrução como tal. Isso seria tolo” (PAPERT, 1994, p. 124). O que está sendo questionado é a aceitação de que o aprofundamento de um conhecimento específico ou sua consolidação como aprendizado esteja necessariamente associado a ele próprio, ou, nas palavras do autor, que “[...] a única forma de melhorar o conhecimento de um estudante sobre o tópico X é ensinar sobre X” (PAPERT, 1994, p. 126).

O construcionismo sugere que a busca ou construção de um conhecimento específico pode estar associada ao processo de construção de um artefato, que por sua vez pode gerar um conjunto de construções e abstrações mentais. Papert (1985, 1994) defende que a construção de algo concreto pode potencializar o processo de construção mental influenciando a aprendizagem.

Diante do exposto, nossa compreensão quanto à aprendizagem de Matemática na visão construcionista, que se amálgama com os pressupostos das metodologias ativas de aprendizagem, não é vista como ato minimalista de transferência de conhecimento do professor para o aluno. O aluno despoja-se da postura de mero ouvinte para assumir a participação ativo-reflexiva, argumentativo-engajada e comprometida com sua aprendizagem. À luz dessa compreensão, partimos à próxima seção, ressaltando o contexto e o percurso metodológico deste trabalho.

#### 4 O nosso contexto e a nossa travessia metodológica

Considerando os processos de ensino e aprendizagem de Matemática que levam em conta as ideias do construcionismo inerentes às metodologias ativas a partir da produção criativa de pontes com cobertura circular, utilizando conhecimentos acerca da equação da circunferência, este trabalho norteia-se pelos pressupostos qualitativos de pesquisa, pois busca “[...] atingir aspectos humanos sem passar pelos crivos da mensuração, sem partir de métodos previamente definidos e, portanto, sem ficar presos a quantificadores e aos cálculos recorrentes” (BICUDO, 2006, p. 107). Desse modo, negamos a neutralidade do pesquisador durante todo processo investigativo e consideramos que há sempre um aspecto subjetivo a ser considerado (TRIVIÑOS, 2009; BOGDAN e BIKLEN, 1994).

A pesquisa foi realizada em sala de aula ao longo de cinco encontros presenciais, de 140 minutos cada, com a participação de 25 alunos do Ensino Médio do IF-Goiano, em Ipameri (GO). Neste artigo trazemos para discussão-análise três etapas realizadas em sala de aula quanto à produção de pontes criativas a partir de conhecimentos específicos e gerais da equação da circunferência. Nesse contexto, evidenciamos o processo de aprendizagem dos alunos a partir de três seções, que chamamos de cenários A, B e C, a saber: (i) Projetando e arquitetando nas aulas de Matemática; (ii) Tirando as ideias do papel e colocando a mão na massa; e (iii) Uma feira de pontes criativas: por que não? Tais cenários são sequenciais e dialógicos e foram analisados à luz do construcionismo e das metodologias ativas de aprendizagem.

Para registro dos dados, utilizamos diversos instrumentos, como, diário de campo (do professor), fotografias, filmagens e depoimentos dos alunos, além dos registros e das produções dos alunos. Utilizaremos recortes-fragmentos dos diálogos-discussões gravados e anotados, bem como faremos uso dos símbolos [ ] para explicitar trecho que se refira à transcrição de fala dos autores. Vale ressaltar que o trabalho está em conformidade com o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) da pesquisa. Assim sendo, partimos à próxima seção, na qual apresentamos o processo de desenvolvimento do trabalho e seus resultados.

#### 5 Cenário A – Projetando e arquitetando nas aulas de Matemática

Em um ambiente de parceria, engajamento e produção colaborativa, na primeira etapa, os alunos foram incentivados a projetar, calcular e a desenhar uma superfície de uma ponte, na forma do arco de circunferência, preservando as características da equação reduzida  $[(x-x_0)^2 + (y-$

$y_0)^2 = R^2]$  e geral  $[x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - R^2) = 0]$  da circunferência. Tal etapa constituiu-se como lugar de estudo, pesquisa e desenvolvimento de ideias coletivas de conceitos de Geometria Analítica quanto aos elementos da circunferência: raio  $R$ ; centro  $(x, y)$ ; e o esboço de distintas circunferências no sistema  $xOy$ , na malha quadriculada, quadro-negro e GeoGebra.



Figura 1: Discussão-compreensão e discussão-reflexiva conjunto-ativamente: Produção-argumentação e participação-ativa dos alunos nas aulas de Geometria Analítica (Dados da Pesquisa)

André: Estamos verificando alguns valores para o centro e raio da circunferência [mostra no GeoGebra]. Não utilizaremos a circunferência inteira, apenas um arco [mostra esboço no quadro-negro] para a ponte.

Fernando: Nossa ideia é fazer a réplica da ponte do infinito [mostra imagens] a partir das ideias que discutimos sobre a equação da circunferência. Estabelecemos, a princípio,  $C(0, -10)$  e  $R=16$ .

Professor: Como vimos [relembra o conceito de circunferência: figura geométrica pertencente ao plano que é constituída pelo conjunto de todos os pontos igualmente distantes de um ponto fixo desse plano; e sinaliza a demonstração e ideias envolvidas na fórmula de Pitágoras:  $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = R^2$ ], podemos descrever o “pedaço” do arco usando essa equação? [Tempestade de ideias coletivas na sala].

Marcos: Dividimos a viga em 12 metros [mostra no quadro] e para cada metro temos um ponto qualquer em  $x$  [ $x_1, x_2, \dots, x_{12}$ ] e para cada um desses pontos na abscissa temos uma pilastra correspondente [altura  $y_1, y_2, \dots, y_{12}$ ]. Uma pilastra do lado da outra vai formar a curva, que é a da circunferência.

[Professor e alunos desenvolvem, conjuntamente, a ideia da altura da pilastra a partir de um ponto pertencente à viga, tendo como base a equação:  $(x-0)^2 + (y+10)^2 = 162$  | Ex.:  $x=4$ ; temos  $y \approx 15,49m$ ].

(Dados da Pesquisa)

Na Figura 1, percebe-se o engajamento dos alunos quanto à discussão-compreensão da construção coletiva, sendo mediada pelo professor em sala de aula, em um ambiente de descobertas, rascunhos e atividades exploratório-investigativas. A proposta foi a de usar as ideias da equação da circunferência e suas propriedades para a construção de uma ponte à luz da

equação da circunferência e conversões — equação reduzida para equação geral, e vice-versa, utilizando o método de completar quadrados. Toda construção teve como base a escolha de um sistema de eixos coordenados  $(x, y)$  no plano cartesiano. Nessa etapa, em especial, os alunos aprenderam os conceitos de Geometria Analítica, revisaram outras ideias e, por extensão, puderam relacionar o conteúdo curricular com conhecimentos específicos para a construção de uma ponte, tendo a altura como pilastra  $y (y_1, y_2, \dots, y_{m-1}, y_m)$ , e o comprimento como viga  $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ .

Cada grupo de alunos precisou esboçar a construção da cobertura da ponte e registrar os devidos cálculos na malha quadriculada e quadro-negro, valorizando a construção de ideias coletivas e a mobilização de conhecimento conjunto, superando a concepção de atividade do tipo receita: (1) encontre o raio e o centro da circunferência; (2) agora, use o método da comparação ou de completar o quadrado para encontrar a equação geral ou reduzida dela etc. Apesar de termos valorizado tais conceitos, o processo de trabalhar com eles foi diferente, conforme observamos nos excertos: “Estamos verificando alguns valores para o centro e raio da circunferência [e] (...) nossa ideia é fazer a réplica (...) [nós] estabelecemos, a princípio,  $C(0, -10)$  e  $R=16$ .” A proposta dessa etapa foi a de romper com a aula de conceito-exemplos e propor um processo formativo mais atuante do aluno, dando mais sentido ao conteúdo estudado em sala mediado pelo professor. Essa concepção, à luz do construcionismo, não significa diminuir a responsabilidade do professor e deixar o aluno fazer o que quiser na sala de aula; na verdade, é um movimento que pressupõe a parceria de ambos durante o processo de produção e argumentação de significados e ideias do conteúdo.

No excerto “dividimos a viga em 12 metros (...) para cada um desses pontos na abscissa temos uma pilastra correspondente [altura  $y_1, y_2, \dots, y_{12}$ ]”, há uma posição ativa de construção do conhecimento pelo aluno, que não recebe tudo pronto, e nem de forma linear e verticalizada pelo professor, ultrapassando a condição de mero ouvinte e consumidor de conceitos isolados. Além disso, é possível considerar que as reflexões e discussões, pelo protagonismo do aluno, que envolvem os conteúdos de Geometria Analítica: de engenharia e arquitetura à construção de pontes, são processuais e contínuas. O aluno é incentivado a pensar e desenvolver e, mesmo analisado por ele, é suscetível de ser pensado mais uma vez. A análise dessa cena se centra no discurso dos participantes, que combina a oralidade e a Matemática, os diálogos informais entre os participantes, e parte do princípio de que o conhecimento informal se apresenta como uma



"oportunidade de aprender e usar a matemática através de um modo não necessariamente formalizado" (PAPERT, 1994, p. 22).

Não só nessa etapa, o conhecimento matemático se mostra mobilizado entre os alunos, sem necessariamente estar encapsulado em formalismos desnecessários, que minam a capacidade do aluno aprender, desenvolver e avançar (AZEVEDO *et al.*, 2018). A título de ilustração, trazemos outro recorte de um grupo de alunos, que apresenta o registro da construção da ponte na malha quadriculada. Em sequência, evidenciamos a discussão dos alunos quanto às medidas das pilastras em relação à viga correspondente, pela equação da circunferência  $[x^2 + (y + 4)^2 = 324]$ ,  $C(0, -4)$  e  $R = 18$ .

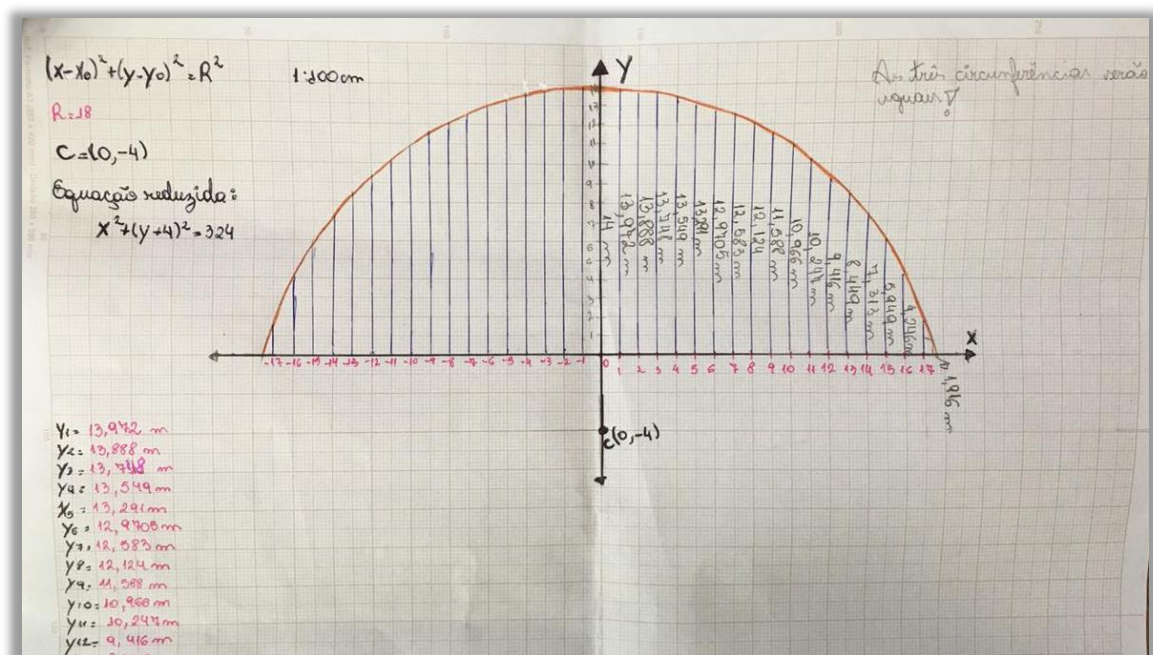


Figura 2: Registro da superfície da ponte e discussão-compreensão e discussão-reflexiva conjunto-ativamente – Produção da cobertura de uma ponte em termos dos conceitos e ideias da Circunferência [Escala: 1:100 cm] (Dados da Pesquisa)

Nicole: Testamos alguns valores para essa ponte (...) Para obtenção da ordenada  $y_1$  do ponto  $x_1$ , substituímos a abscissa  $x_1 = 1$  na equação da circunferência:  $[1^2 + (y - 4)^2 = 324] \leftrightarrow y_1 \approx 13,972$  m. Da mesma forma, a ordenada  $y_2$  do ponto  $x_2 = 2$ , fizemos  $x_2: [2^2 + (y - 4)^2 = 324] \leftrightarrow y_2 \approx 13,888$  m na equação da circunferência, e assim sucessivamente para cada valor de  $x$ , temos a altura da pilastra.

João Guilherme: Analisamos vários resultados e notamos que o valor esquerdo da circunferência tem o mesmo valor do lado direito... Erramos alguns cálculos e, depois, por essa ideia de lados iguais, conseguimos visualizar o erro e corrigir os nossos cálculos (...) [pensa um pouco e diz:] não é só visual aqui, galera, é ideia matemática constatada! [risos entre os alunos e burburinhos dispersos na sala].

Nicole: Isso mesmo. As pilastras de lados opostos [em relação ao eixo das ordenadas] têm a mesma altura, porque é uma circunferência. Se  $y = 13$  m desse lado de cá, então do outro lado vai ser também.

(Dados da Pesquisa)

Os alunos não se limitaram à compreensão do assunto pelo visual, mas constatarem ideias matemáticas a partir da exploração. Refletiram ativamente sobre o cálculo simétrico das pilastras e verificaram, em conjunto, as propriedades da circunferência. Esse processo de realizar as etapas do processo de refletir, errar, analisar, refletir novamente, e constatar ideias matemáticas, à luz do construcionismo, configura-se como um momento de depuração, que favorece o aluno a buscar informações que lhe faltam e requer também reflexões sobre as novas ideias que vão surgindo durante o processo de aprendizagem (MALTEMPI, 2005).

Nessa etapa os alunos foram encorajados a mobilizar o conhecimento sobre os elementos e propriedades da circunferência e suas propriedades, articulando-os com problemas reais encaminhados, como a da projeção em escala, da altura das pilastras da ponte e o tamanho da viga, não se limitando a atividades do tipo receita e processos mecânicos isolados. Essa busca pela mudança na sala de aula não é linear e nem se limita ao procedimental, mas se mostra dialógica entre professor-aluno e aluno-aluno, e objetiva "(...) descentralizar o foco excessivo do conteúdo procedimental matemático, que muitas vezes se reduz aos aspectos mecânicos e, ao mesmo tempo, privilegiar espaços associados à: investigação; curiosidade; e construção de ideias coletivas" (AZEVEDO, 2017, p. 36). A partir desse recorte-contexto, avançamos para a etapa 2 do desenvolvimento da atividade, que relaciona as ideias mobilizadas de Geometria Analítica com a construção criativa de pontes, usando palitos.

## 6 Cenário B – Tirando as ideias do papel e colocando a mão na massa

Na segunda etapa cada grupo de alunos foi incentivado a desenvolver projetos reais de Arquitetura e Engenharia, utilizando palitos de picolé e de churrasco, para reproduzir pontes reais ao redor do mundo. Os alunos precisaram fazer cálculos precisos, desenvolver ideias criativas, articular ideias coletivas e proporcionais das pontes, valorizando os aspectos da ação *mão na massa*, em sala e fora dela, como mostra a Figura 3.

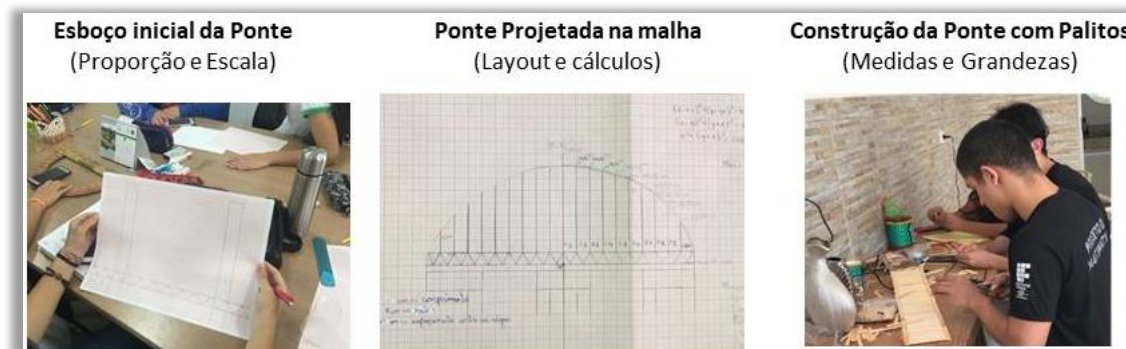


Figura 3: Diferentes etapas da construção da ponte à luz das ideias e conceitos da GA em sala de aula (Dados da Pesquisa)

Tirar as ideias do papel constituiu-se como etapa *mão na massa* ao longo do processo de aprendizagem quanto à aplicação da equação da circunferência: conceitos e propriedades. Aprendizagem, nesta etapa do processo, que passa pelas mãos e carrega ideias e características da aprendizagem criativa, associa-se à ideia de invenções curiosas, com blocos de madeira, atividades para modelar, construções eletrônicas e engenhocas pessoais. Foi uma das etapas que mais manteve os alunos encorajados e que precisaram lidar com questões imprevistas, e não tão fáceis de serem resolvidas. Muito além de recortar papelão, manipular massinhas de projeções, montar sistemas/circuitos de corrente elétrica para iluminação da ponte, construir a viga e as pilastras, a partir da equação reduzida da circunferência, os alunos mostravam-se imersos nas produções científico-tecnológicas e, por conseguinte, com seu processo formativo.

A ideia aqui não é a de reduzir o ensino e a aprendizagem de equação da circunferência no Ensino Médio ao manuseio de materiais concretos ou à manipulação de palitos. A retomada das concepções das atividades *mão na massa* vai além dessa compreensão e se efetiva no fato de oportunizar situações desencadeadoras de invenção e aprendizagem ativa ao aluno, de tal modo que ele possa ser capaz de criar novas ideias em conjunto; estabelecer novas relações do conteúdo; desenvolver projetos de interesse pessoal; e ser capaz de interpretar e propor soluções a problemas encaminhados de forma criativa, isto é, ser um pensador criativo.

Assim, "o processo de se tornar um pensador Criativo "com C maiúsculo" é em si um processo interativo" (RESNICK, 2007, p. 5), que conjuga elementos de uma formação mais ativo-participativa, menos isolada e mais problematizada contextual em sala de aula. Esse entendimento de incentivar pensadores criativos nas aulas de Geometria Analítica caminha no sentido contrário ao de "fazer somente contas" ou limitar-se ao contexto de listas de exercícios: do tipo receita. É uma proposta que incentiva o aluno, a partir da produção criativa da ponte, a pensar em uma

situação concreta, a lidar com problemas encaminhados e encontrar soluções aos imprevistos, que vão surgindo ao longo do processo de produção. Um desses imprevistos aconteceu na discussão-formalização do conteúdo de circunferência, relacionando-a como caso particular de elipse, entre os grupos de alunos. Isso pode ser observado na Figura 4.

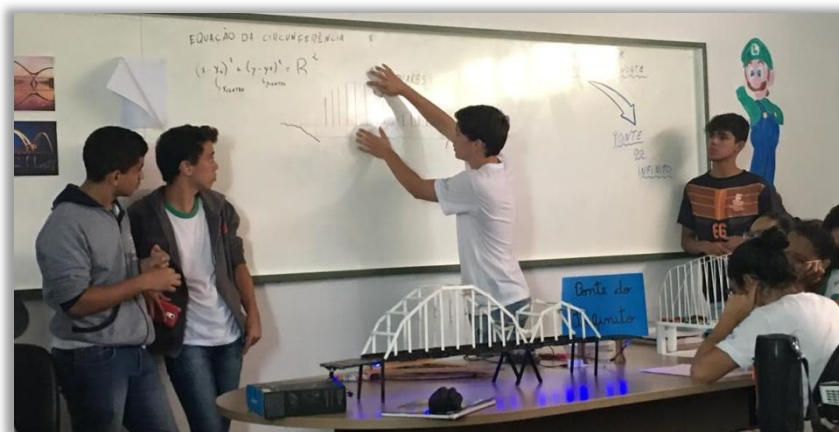


Figura 4: Apresentação dos cálculos das pilastras [alturas em y] da Ponte do Infinito<sup>1</sup> e luzes de Led – Estamos no caminho certo! Não é simplesmente uma elipse, é um caso particular dela: circunferência (Dados da Pesquisa)

- André: As coisas estão caminhando. O tamanho da altura de cada pilastra está exato, de acordo com nossos cálculos [os alunos utilizaram a equação da circunferência para descobrir a altura de cada palito].
- Aberlado: Podem notar que falta traçar o arco entre as pilastras para não ficar reto dessa forma [mostra a engenhoca em processo à turma: ponte com pilastras brancas e luzes de led azul na base da passarela]
- Marcos: Os cálculos estão precisos (...) mas uma coisa que me deixou intrigado é que [os alunos não estudaram ainda o conteúdo de outras cônicas] descobrimos que há elipse na jogada. Ao discutir com o professor [explica à turma], nós percebemos nosso erro: colocamos o comprimento da travessia da ponte maior do que o diâmetro da circunferência de referência, o que é errado, pois isso descaracteriza as propriedades de circunferência, tornando-se outra elipse. Daí, nossos cálculos não batiam. Ficavam negativos. Questionamos junto ao professor na sessão-orientada, à tarde [contra turno]: como negativos?
- Marcos: (...) como o comprimento da travessia era maior do que o diâmetro, o cálculo [valor do raio] ficou negativo [ $R < 0$ ], o que é um absurdo matemático, uma vez que distância é sempre em módulo.
- Professor: (...) Isso que o grupo traz à discussão é muito importante e é tema do próximo bimestre. O que o Marcos apresenta para nós é que, apesar deles terem usado a equação da circunferência corretamente para fazerem os cálculos da altura de cada pilastra, eles não consideraram o tamanho proporcional da travessia em relação ao diâmetro da circunferência, o que fere diretamente a propriedade dessa cônica.

<sup>1</sup> Estudantes-idealizadores: André, Marcos Costa, Fernando, Ginane, Felipe, Aberlado, Fábio e Alexandre.

André: (...) foi trabalhoso (...) Colocamos a mão na massa, criamos coisas tão criativas.

(Dados da Pesquisa)

O processo de mobilização de significado do conteúdo, a partir das metodologias ativas, constituiu-se como um processo de idas e vindas, valorizando o erro como aliado do processo de aprendizagem, como se nota no seguinte excerto: “(...) colocamos o comprimento da travessia da ponte maior do que o diâmetro da circunferência de referência, o que é errado, pois isso descaracteriza as propriedades de circunferência, tornando-se outra elipse”. O depoimento do aluno aponta para reflexão-argumentação do conteúdo de que, mesmo sendo derivadas de um corte plano de um cone, a circunferência e elipse geral possuem características não necessariamente iguais, uma vez que circunferência é apenas um caso particular de elipse. Nessa ocasião, o processo de depuração a partir da constatação do erro conceitual do conteúdo tornou-se um importante momento de aprendizagem, pois ao surgir erros, durante o processo de busca e construção da ponte do infinito, o aluno pode refletir sobre eles e propor estratégias para corrigi-los e, por extensão, teve a oportunidade de explorar conceitos que ainda não haviam sido trabalhados em sala de aula, como a cônica elipse.

A construção de conhecimento do estudante, portanto, que considera o erro como um fator importante ao longo do processo, não segue uma trajetória linear, que "vai de uma posição verdadeira a outra posição verdadeira, mais avançada. Sua trajetória natural inclui falsos conceitos que ensina tanto sobre a formulação de conceitos quanto as verdadeiras" (PAPERT, 1985, p. 162). A ideia de depuração defendida pelo construcionismo, que tem como matéria prima o erro, pode permitir a manifestação de estratégias poderosas do pensamento criativo do aluno e a reflexão de sua própria ação de aprendizagem, que não segue necessariamente uma ordem pré-definida, sem erros e linear.

Notamos ainda que quando o aluno tem a oportunidade de lidar com situações embaraçosas e até conflituosas quanto aos conceitos matemáticos, como a de distâncias negativas — valor do raio menor que zero —, o leva a questionar tais resultados e refletir sistematicamente sobre eles. Em especial, o excerto “(...) como o comprimento da travessia era maior do que o diâmetro, o cálculo [valor do raio] ficou negativo [ $R < 0$ ], o que é um absurdo matemático, uma vez que distância é em módulo”, apresenta o confronto do aluno de resultados absurdos matemáticos, questionando-o e tentando encontrar meios para superá-lo.

A travessia da ponte deveria, assim, estar proporcional ao diâmetro, o que não foi considerado pelo grupo, gerando conflitos nos próprios cálculos. Vale ressaltar que, nesse momento de apresentação, porém, os cálculos já haviam sido corrigidos e, em forma de depoimento, o aluno Marcos esclarece o percurso de aprendizagem à turma, que se constitui como uma oportunidade de aprendizagem compartilhada de ideias. Ao compartilhar ideias, novos ventos apareceram no contexto de aprendizagem em relação aos conceitos de circunferência e elipse — caso geral —, entre os quais se destacaram: (a) Circunferência pode ser entendida como um conjunto de pontos em um plano que distam a mesma medida de um ponto dado (central), isto é, conjunto dos  $P$  tais que  $PO = r$ ; e (b) Elipse: conjunto de pontos de um plano que dão a mesma medida quando adicionada a sua distância a dois pontos fixos. Dois pontos (focos,  $F_1$  e  $F_2$ ) e uma medida ( $d$ ). Lugar geométrico: conjunto dos  $P$  tais que  $PF_1 + PF_2 = d$ .

A discussão entre a construção da ponte pelas ideias de circunferência não se encerra no conceito em si mesmo e ideias correlacionadas, mas na essência de aprender e a criar coletivamente, como se observa no excerto: “(...) colocamos a mão na massa, criamos coisas tão criativas”. Essa etapa de construção de colocar a mão na massa e fazer coisas com o conhecimento mobilizado constitui-se como ações de aprendizagem que se originam como possibilidades de descobertas ativas e criativas que vão além da sala de aula. Para compreendermos melhor essas possibilidades, avançamos à próxima etapa, que mostra, em forma de recorte, o trabalho dos alunos em sua fase final, sendo apresentado à escola.

## **7 Cenário C – Uma feira de pontes criativas: por que não?**

Ao longo do processo de aprendizagem da equação da circunferência e elementos correlatos à Geometria Analítica, como pontos do plano, raio, centro etc., os alunos foram não só incentivados a aprender o conteúdo de equações da circunferência e seus subtópicos, mas a criar pontes utilizando seus conhecimentos, dando mais sentido ao que estudavam. Isso porque entendemos a sala de aula de Matemática não só como lugar de conteúdo, mas como lugar para desenvolver o potencial criativo e autonomia. Nesse sentido, trazemos abaixo, o desenvolvimento criativo da ponte com palitos de churrasco desenvolvida pelo grupo de alunas. É um processo que privilegia o conhecimento científico, sem deixar de lado a criatividade.

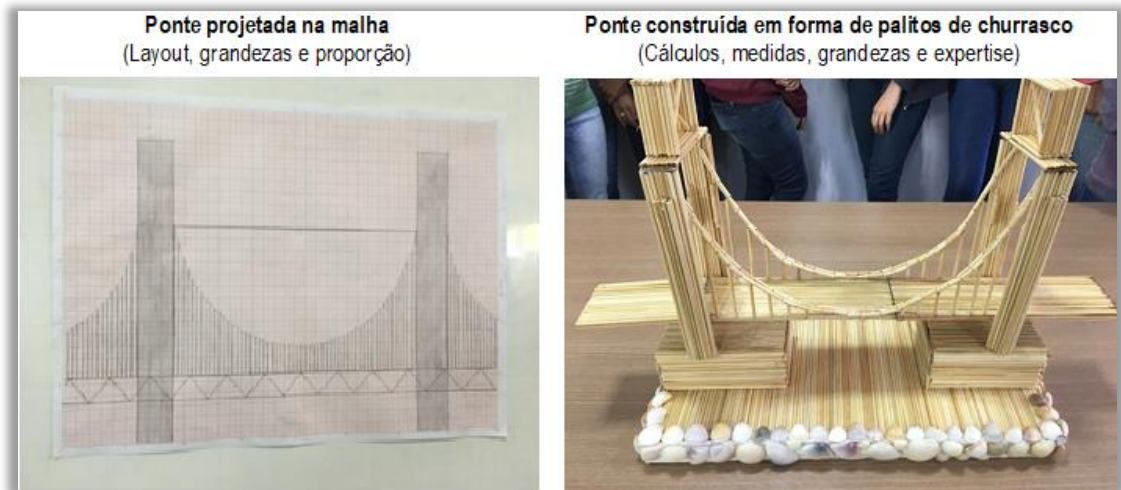


Figura 5: Apresentação da ponte projetada na malha e na construída com palitos de churrasco<sup>2</sup> (Dados da Pesquisa)

A Figura 5 traz um exemplo do processo de desenvolvimento da ponte: do rascunho à arquitetura. As etapas de desenvolvimento da construção dela não foram triviais. Isso pode ser observado no relato da aluna Joyce: “Levamos muito tempo para desenvolver as ideias e construir a nossa ponte (...) usamos mais de 600 palitos de churrasco, que não foram colocados/colados de qualquer forma. Precisamos pensar no layout da ponte, cortar e calcular direitinho o tamanho de cada pilastra de acordo com o tamanho da viga, tendo por base a equação da circunferência”; e segundo a aluna Ana Luiza: “(...) foi desafiador e muito trabalhoso, mas gratificante ver o resultado final. Não tínhamos respostas para tudo, como nos exercícios, mas as encontramos ao longo do processo de busca permanente e estratégica”.

Tais depoimentos apontam para a vivência de experiências múltiplas em sala de aula que privilegiam espaços de aprendizagem significativos. O processo de empenhar-se para a mobilização de ideias e construção de uma ponte não é um processo direto e que se torna mais favorável do que simplesmente folhas de exercício e “[...] experimentos ritualísticos da escola, pois pelo menos os aprendizes estarão engajados em uma atividade significativa e socialmente importante, sobre a qual eles concretamente se sentem responsáveis” (PAPERT, 1994, p. 38).

Após o desenvolvimento das etapas, os grupos de alunos foram incentivados a compartilhar suas ideias à escola, mobilizar ideias e discutir sobre o processo de criação. Entendemos que isso pressupõe (re)organização de conceber e mediar os processos pedagógicos, de ensino e aprendizagem, que possibilite ao estudante participar, refletir e

<sup>2</sup> Estudantes-idealizadores: Joyce, Shayene, Cinthya, Raphaela, Ana Carolina, Ana Luiza, Laiane, Karollayne.

compartilhar o que constrói em vez de simplesmente ser um mero executor de provas ou receptor de tarefas, que pouco contribui para a sua formação e autonomia no contexto escolar.



Figura 6: Exposição de Pontes à comunidade escola: Tempestades de ideias e discussão-argumentações das diferentes etapas da construção da Ponte Criativa (Dados da Pesquisa)

Compreendemos que propor e desenvolver um conjunto de ações em que os estudantes se sintam responsáveis e que os incentivem a compartilhar ideias constitui-se como um processo contrário ao de treinar pessoas para uma determinada finalidade pedagógica ou avaliativa (AZEVEDO, 2017; AZEVEDO *et al.*, 2018; AZEVEDO, MALTEMPI e LYRA, 2019). Para que essa autonomia e essa responsabilidade ocorram é necessário, pela qual defende Papert (1994), criar espaços de aprendizagem a partir da sala de aula. Sejam em forma de projetos ou no próprio ritmo de um determinado conteúdo curricular, de modo que oportunize ao aluno a capacidade de aprender novas habilidades, assimilar novas ideias e lidar com imprevisto.

## 8 Considerações

O percurso apresentado, tendo como base o construcionismo e os pressupostos das metodologias ativas de aprendizagem, permite-nos compreender o processo de aprendizagem da equação da circunferência a partir da produção criativa de pontes em um movimento dinâmico, coletivo e não linear, tendo em vista o uso desse tipo de metodologia. Um contexto de aprendizagem de Matemática no Ensino Médio que prestigia aspectos da construção de ideias e procedimentos matemáticos pelo coletivo, corroborando a importância da aprendizagem ativa contextual-criativa e argumentativo-reflexiva do aluno.

Situações em que o aluno tem oportunidades de criar e inventar coisas a partir de um conteúdo curricular, de forma não mecânica ou limitada ao teste classificatório e, por vezes, excludente, contribui para a sua aprendizagem de forma atuante e participativa em sala de aula.



Não é o professor ensinando e o aluno copiando, mas ambos caminham juntos como parceiros de aprendizagem; construtores de ideias, teorias e contextos.

Ao incentivar a discussão-reflexão e questionamento-argumentação do conteúdo da equação da circunferência, ao longo do processo da construção das pontes, os alunos puderam, em conjunto, desenvolver ideias, aperfeiçoar estratégias, identificar erros e, por extensão, traçar meios para corrigi-los. O contexto de aprendizagem em Matemática, nesse sentido, é outro, configurando-se como não sequencial conceito-exemplo-exercícios e nem linear de passos enrijecidos. A aprendizagem conjuga-se pelo ativo-argumentativo, que coloca em suspensão o foco excessivo no conteúdo procedimental e, por conseguinte, valoriza as ideias, o questionamento e os conceitos-aplicados do conteúdo curricular pelo aluno em sala de aula.

Ao valorizar o processo de participação do aluno ao longo da produção dos rascunhos das plantas das pontes, bem como o seu protagonismo em propor respostas aos problemas encaminhados, como a da construção de pontes com palitos, percebemos que os alunos atuaram contra a passividade em sala de aula e, por extensão, puderam protagonizar seu processo de aprendizagem como um pensador criativo: imaginando, inventando, criando, conjecturando, dialogando e, claro, errando e depurando. Esse processo de ser criativo constituiu-se como contexto de aprendizagem que descaracteriza a posição do aluno de um mero receptor de informação, levando-o a tornar-se um questionador de ideias, inventor de artefatos e, por extensão, um construtor de conhecimentos (PAPERT, 1994; AZEVEDO, 2017). É justamente isso que o aluno, na visão construcionista, deve assumir: uma postura ativa, motivada, questionadora e comprometida com o exercício de sua aprendizagem.

Por fim, destacamos que trabalhar com as metodologias ativas em sala de aula, em especial, no Ensino Médio, requer, um (re)pensar das propostas pedagógicas que às vezes são impostas verticalmente pelo sistema educacional. A proposta de romper com a aula e o modelo tradicional, conforme Azevedo (2017), não significa diminuir a responsabilidade do professor e deixar o aluno fazer o que quiser. Pelo contrário, é um movimento que pressupõe a parceria de ambos durante todo processo de produção de significados, de ideias e contextos, e de conhecimentos matemáticos. Essa busca pela mudança, de algum modo, deve valorizar não só o conhecimento técnico e curricular do aluno, mas incentivá-lo a desenvolver a sua autonomia, liderança e criatividade em sala de aula, não limitada aos testes, mas voltada ao mundo de hoje.

## Agradecimentos

Aos queridos alunos dos 3º anos do IF-Goiano, *campus* avançado Ipameri, pelo compromisso com a aprendizagem ativa, pela dedicação contínua nas aulas e nos projetos de matemática.

## Referências

ALMEIDA, Fernando José de; FONSECA JÚNIOR, Fernando Moraes. *Projetos e ambientes inovadores*. Brasília: Ministério da Educação / Secretaria de Educação à Distância, 2000.

AZEVEDO, Greiton Toledo de. *Construção de conhecimento matemático a partir da produção de jogos digitais em um ambiente construcionista de aprendizagem: possibilidades e desafios*. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística. Universidade Federal de Goiás. Goiana.

AZEVEDO, Greiton Toledo de; MALTEMPI, Marcus Vinicius; LYRA, Gene Maria Vieira. Computational thinking and Active Learning in Mathematics as a contribution to the treatment of Parkinson's disease. In: SCIENCE AND MATHEMATICS EDUCATION IN THE 21st CENTURY, 2019, Braga. Braga: Universidade do Minho, 2019, p. 75-76.

AZEVEDO, Greiton Toledo de; MALTEMPI, Marcus Vinicius; LYRA, Gene Maria Vieira; RIBEIRO, José Pedro Machado. *Produção de games nas aulas de Matemática: por que não?* *Acta Scientiae*, Canoas, v. 20, p. 950-966, set./out. 2018.

BICUDO, Maria Aparecida Viggiani. Pesquisa qualitativa e pesquisa qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: BORBA, Marcelo de Carvalho; Araújo, Jussara de Loiola. (Org.). *Pesquisa qualitativa em Educação Matemática*. São Paulo: Autêntica, 2006, p. 100-118.

BOGDAN, Roberto Carlos; BIKLEN, Sari Knopp. *Investigação qualitativa em Educação*. Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

MALTEMPI, Marcus Vinicius. Prática pedagógica e as tecnologias de informação e comunicação (TIC). In: PINHO, Sheila Zambello de. (Org.). *Oficinas de estudos pedagógicos: reflexões sobre a prática do ensino superior*. São Paulo: Cultura Acadêmica, 2008, p. 157-169.

MALTEMPI, Marcus Vinicius. Construcionismo: pano de fundo para pesquisas em informática aplicada à Educação Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; BORBA, Marcelo de Carvalho. (Org.). *Educação Matemática: pesquisa em movimento*. São Paulo: Cortez, 2012, p. 287-307.

MALTEMPI, Marcus Vinicius. Novas tecnologias e construção de conhecimento: reflexões e perspectivas. In: CONGRESSO IBERO-AMERICANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5, 2005, Porto. Actas do V CIBEM. Porto: Associação de Professores de Matemática, 2005.

PAPERT, Seymour. *A máquina das crianças: repensando a escola na era informática*. Tradução de Sandra Costa. Porto Alegre: Artes Médicas, 1994.

PAPERT, Seymour. *Logo: computadores e Educação*. Tradução de José Armando Valente. São Paulo: Brasiliense, 1985.

RESNICK, Mitchel. *Lifelong Kindergarten: cultivating creativity through projects, passion, peers and play*. Cambridge: MIT Press, 2017.

TRIVIÑOS, Augusto Nibaço Silva. *Introdução à pesquisa em Ciências Sociais: a pesquisa qualitativa em Educação*. 18. reimp. São Paulo: Atlas, 2009.